3章関数とグラフ
第1節　2次関数
Basic 問題146,156,159,160の解説　pp.31-33

1　2次関数の平行移動とグラフ

1.1　点の x, y 軸・原点対称移動

座標系における点の移動の考え方をを図1に示しています．いま，点 P_0 を y 軸を対称として平行移動させると x の値の符号が変わり $-x$ となります (緑色の線)，x 軸を対称として平行移動させると y の値の符号が変わり $-y$ となります (赤色の線) にそれぞれ着目してください．具体例を2に示しています．

原点を対称に移動させると x, y の符号が変わることがお解りいただけるかと思います．

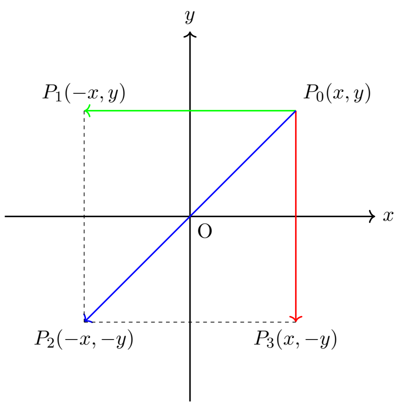

図 1: 点 P の移動

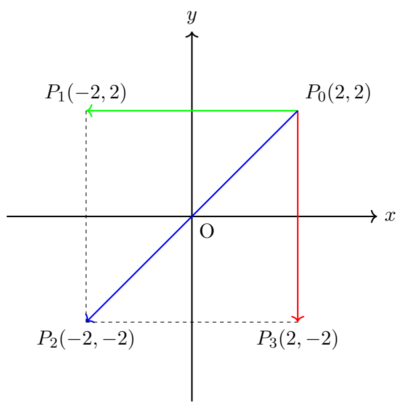

図 2: 移動の具体例

1.2　関数の x, y 軸・原点対称移動

いま図1の点 P_0 がある関数 $f(x)$ の一点であるとすると $y = f(x)$ なので P_0 の座標は $P_0(s, f(x))$ と書いても良い．そうすると点 P_1 は $P_1(-x, f(-x))$ となる．同様に，$P_2(-x, -f(-x)), P_3(x, -f(x))$ と書ける．

これをまとめて

関数の対称移動

関数 $y = f(x)$ を

1. y 軸に対称移動させたものは $y = f(-x)$ に等しい
2. x 軸に対称移動させたものは $-y = f(x)$ に等しい
3. x, y 軸に対称移動させたものは $-y = f(-x)$ に等しい

1.3　2 次関数グラフの平行移動

2 次関数を

$$y = ax^2, a > 0 \tag{1}$$

とすると，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動するときの 2 次函数の式について考える．

$y = ax^2$ のグラフを図 3 に示します．これを x 軸，y 軸方向に移動した場合をグラフを図 4 に示している．頂点が x 軸に接したまま x 軸の正方向に移動で移動後の頂点の座標が $(p, 0)$ となることから 2 次関数の式は $y = a(x-p)^2$ となることは直感的に理解できるでしょう．ので図 5 と 図 6 にそれぞれ示します．

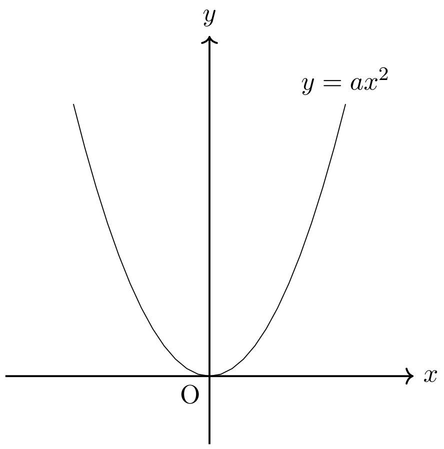

図 3: 2 次関数グラフの基本型 $y = ax^2$

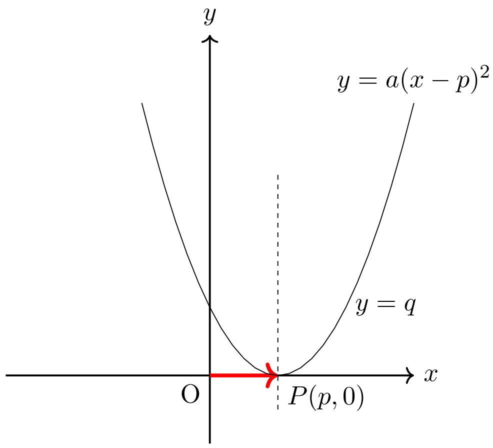

図 4: x 軸方向に p 平行移動

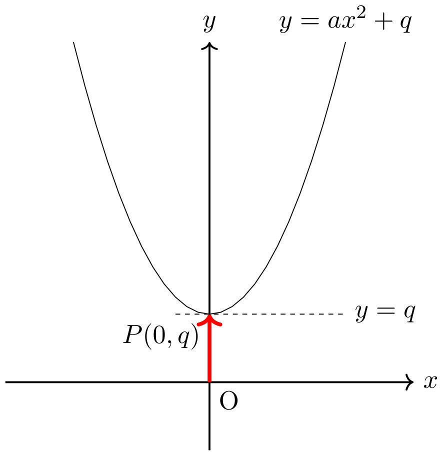

図 5: y 軸方向に q 移動

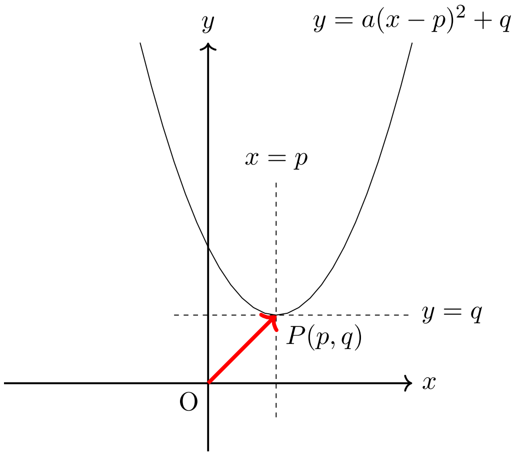

図 6: x, y 軸に p, q 平行移動

1.4 平行移動したときの数式の表現

座標系と数式との関係について簡単に考察します．図 7 において，$x-y$ 座標平面の $y=ax^2$ 上に一つの点をとり，これを $t(x_t,y_t)$ とします．

$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動します．平行移動後の 2 次関数グラフの頂点を原点とする座標平面を $X-Y$ とすると，$X-Y$ 平面にあるこの 2 次関数は

$$Y=aX^2 \tag{2}$$

と記述できます．

1.4.1 $Y=aX^2$ を $x-y$ 平面で記述

$X-Y$ 平面の点 (X_T,Y_T) を $x-y$ 座標系で考えると

$$x=X_T+p \tag{3}$$
$$y=Y_T+q \tag{4}$$

例えば，$y=ax^2$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 移動したとき，$X-Y$ 平面における点 $T(X_T,Y_T)$ が $(2,8)_{XY}$ であるとする．これを $x-y$ 平面で表すと $(4,9)_{xy}$ となります．

式 3,4 がすべての点に成立することから，

$$X=x-p \tag{5}$$
$$Y=y-q \tag{6}$$

が得られる．このこれを 2 次関数の式 2 に代入する．

$$y-q=a(x-p)^2 \tag{7}$$
$$y=a(x-p)^2+q \tag{8}$$

この式 8 は平行移動したあとの 2 次関数を表す式ですね．

1.4.2 一般化

関数の平行移動

関数 $y=f(x)$ を x,y 軸にそれぞれ p,q 平行移動させると

$$y-q=f(x-p)$$

となる．

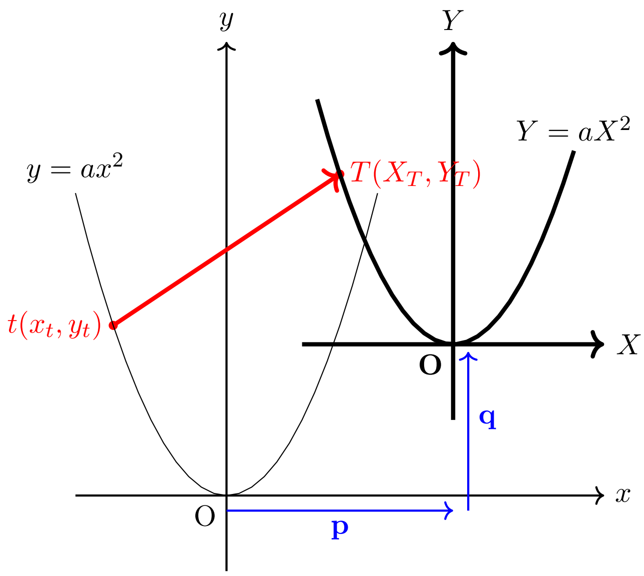

図 7: x, y 軸に p, q 平行移動

例題 1 $y = ax^2 + bx + c$ をを x, y 軸にそれぞれ p, q 平行移動させる.

$$
\begin{aligned}
y - q &= a(x-p)^2 + b(x-p) + c \\
y &= a(x-p)^2 + b(x-p) + c + q
\end{aligned}
$$

例題 *2* $y = 2x^2 - 4x + 3$ を x 方向に 1, y 軸 2 に平行移動.

$$
\begin{aligned}
y - 2 &= 2(x-1)^2 + 4(x-1) + 3 \\
y &= 2(x^2 - 2x + 1) + 4(x-1) + 3 + 2 \\
y &= 2x^2 - 4x + 24x - 4 + 5 \\
y &= 2x^2 + 3
\end{aligned}
$$

問題 *146* $y = 2x^2$ を平行移動

1. x 軸方向に 3 移動なので

   変数 x を $x-3$ に置き換えて

   $y = 2(x-3)^2$

2. x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 なので

   変数 x を $\boxed{}$ に置き換えて, 式全体が正方向に移動できるように *+2*

   $\boxed{}$

3. x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 なので

   変数 $\boxed{}$ を $\boxed{}$ に置き換えて, 式全体が正方向に移動できるように $\boxed{}$

   $\boxed{}$

   [ポイント]
   「x 軸方向に -2」という平行移動は頂点の座標が $(0,0)$ から $(-2,0)$ へ移動することを意味するので，$y = 2(x+2)^2 + q$ と書ける．次に「y 軸方向に -1 なっています．」なので $q = +1$ である．

問題 *146* 別解

平方完成の式は $y = a(x-p)^2 + q)$ である．与式 $y = 2x^2$ は $a = 2, p = 0, q = 0$ と捉えることができる．条件 *(*題意*)* より，a, p, q を見い出せば良い．

1. x 軸方向に 3 移動なので

   $a = 2, p = 3, q = 0$

   よって，$y = 2(x-3)^2$

2. x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 なので

   $a = 2, p = 1, q = 2$

   よって，$y = 2(x-1)^2 + 2$

3. x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 なので

   $a = 2, p = -2, q = -1$

   よって，$y = 2(x+2)^2 - 1$

2　問題156

与式 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ より平方完成の $y=a(x-p)^2+q$ における

$\boxed{a=\qquad}$,

$\boxed{p=\qquad}$,

$\boxed{q=\qquad}$

題意より x 軸方向に -2，y 軸方向に 1，の平行移動なので，平行移動後の

$\boxed{p=\qquad}$,

$\boxed{q=\qquad}$

これらを平方完成の式に代入して

$\boxed{y=\qquad\qquad}$

3　問題159

次の式が与えられている

$$y=x^2+2x-3$$

1. y 軸に関して対称移動

   y 軸に関して対称移動すると $y=f(-x)$ に等しいことより

$$\begin{aligned} y &= (-x)^2+2(-x)-3 \\ y &= x^2-2x-3 \end{aligned}$$

2. 原点に関して対称移動

   原点に関して対称移動は $-y=f(-x)$ に等しいことより

$$\begin{aligned} -y &= (-x)^2+2(-x)-3 \\ y &= -x^2+2x+3 \end{aligned}$$

4　問題160

平行移動前の 2 次式を平方完成する

$$\begin{aligned} y &= -x^2-2x+3 \\ y &= -(x^2+2x)+3 \\ y &= -(x+1)^2+4 \end{aligned} \tag{9}$$

これより，頂点の座標は $(-1, 4)$ であることがわかる．
　平行移動後の 2 次式を平方完成する

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x + 1 \\ y &= -(x^2 - 6x) + 1 \\ y &= -(x-3)^2 + 10 \end{aligned} \tag{10}$$

これより，頂点の座標は $(3, 10)$ であることがわかる．
　両者を比較して x 軸方向に 4，y 軸方向に 6 平行移動したことがわかる．