1　平方完成を求めてグラフを書く

1.1　平方完成の導出

2 次式の一般形 $y = ax^2 + bx + c$ の平方完成を次に示しておきます．この式変形が自分でできるようになっておきなさい．

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}) + c \\
&= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left\{x^2 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - a\left\{\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left\{\frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left\{\frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a}\right\} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left\{\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$p = -\dfrac{b}{2a}, q = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x - p)^2 + q
\end{aligned}
$$

解の公式を導き出す計算と同じですね．因数分解 (乗法公式)$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ の応用です．

1.2　グラフの基本

書き方

1. 座標軸には矢印
2. 原点には O
3. 頂点の座標を記入
4. x 軸，y 軸との交点には座標を記入
5. 滑らかな曲線で描く
6. 手書きで良い

2　問題147

1. $y = x^2 - 2x + 1$ 公式をそのまま適用すれば良い
   $y = (x-1)^2$

頂点の座標	$(p, q$ ようです. $) = (1, 0)$
対称軸	$x = 1$
x 軸との交点	$x = 1$
y 軸との交点	$y = 1$

2. $y = 2x^2 - 4x + 3$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x) + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= 2\{(x-1)^2 - 1\} + 3 \\ &= 2(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (1, 1)$
対称軸	$x = 1$
x 軸との交点	なし
y 軸との交点	$y = 3$

3. $y = -x^2 + 4x - 3$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x - 3 \\ &= -(x^2 - 4x) - 3 \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3 \\ &= -(x-2)^2 + 4 - 3 \\ &= -(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (2, 1)$
対称軸	$x = 2$
x 軸との交点	$x = 3, x = 1$ で交わる
y 軸との交点	$y = 3$

4. $y = x^2 - x - 2$

$$\begin{aligned}
y &= x^2 - x - 2 \\
&= (x^2 - x) - 2 \\
&= \left\{x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} - 2 \\
&= \left\{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right\} - 2 \\
&= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 \\
&= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1+8}{4} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$
対称軸	$x = \frac{1}{2}$
x 軸との交点	$x = 2, x = -1$ で交わる
y 軸との交点	$y = -2$

5. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x) \\
&= -\frac{1}{2}\left\{(x^2 - 2x + 1 - 1)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{(x - 1)^2 - 1\right\} \\
&= -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (1, \frac{1}{2})$
対称軸	$x = 1$
x 軸との交点	$x = 0, x = 2$ で交わる
y 軸との交点	$y = 0$
原点を通る	

6. $y = -2x^2 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 3x + 2 \\ &= -2(x^2 + \frac{3}{2}x) + 2 \\ &= -2\left\{x^2 + 2\frac{3}{4}x + (\frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2\right\} + 2 \\ &= -2\left\{(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16}\right\} + 2 \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} + 2 \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9+16}{8} \\ &= -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} \end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (-\frac{3}{4}, \frac{25}{8})$
対称軸	$x = 1$
x 軸との交点	$x = 0, x = 2$ で交わる
y 軸との交点	$y = 0$
原点を通る	

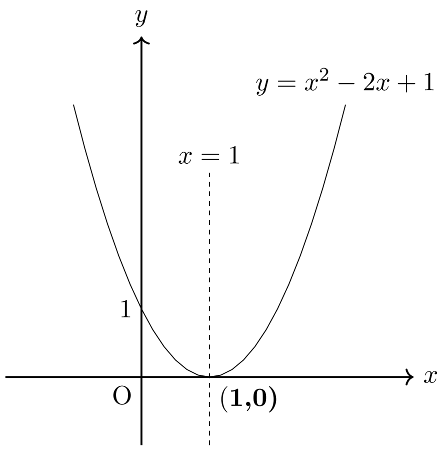

図 1: 問題 147(1)

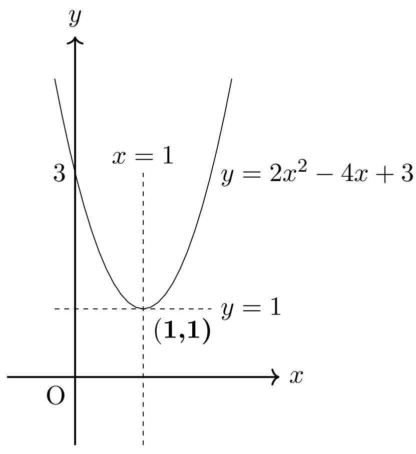

図 2: 問題 147(2)

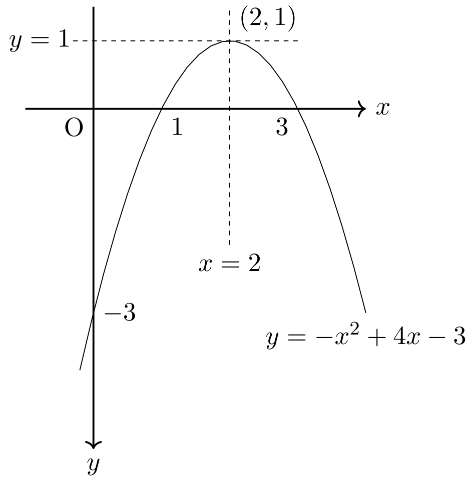

図 3: 問題 147(3)

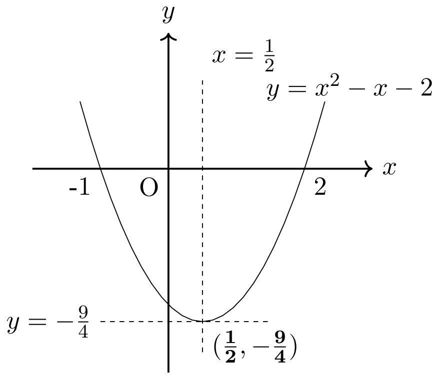

図 4: 問題 147(4)

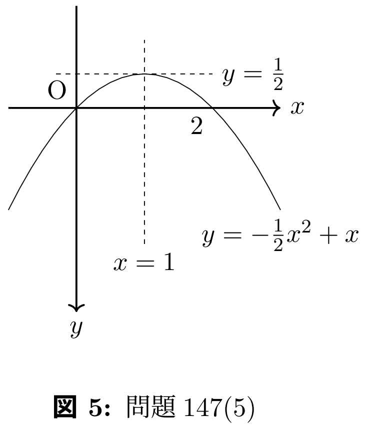

図 5: 問題 147(5)

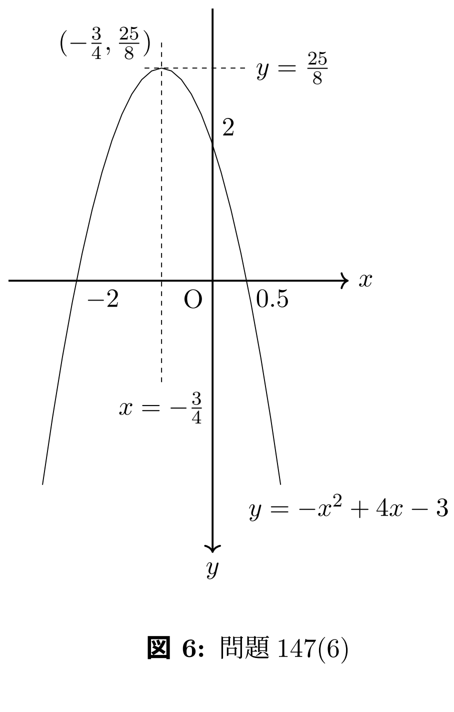

図 6: 問題 147(6)

3　問題 157

2 次関数 $y = x^2 + 3x$ を平方完成する．

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + 3x \\
&= x^2 + 2\frac{3}{2}x \\
&= x^2 + 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

頂点の座標	$(p, q) = (-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$
対称軸	$x = -\frac{3}{2}$
x 軸との交点	$x = -3, x =$ で交わる
y 軸との交点	$y = 0$
原点を通る	

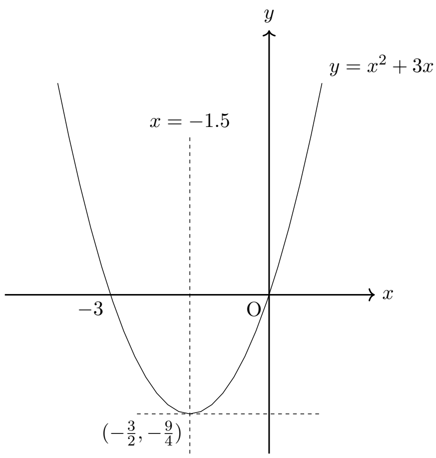

図 7: 問題 157 のグラフ