3 章関数とグラフ
第 1 節　2 次関数
Basic 問題 148,149,158 の解説　pp.31-33

1　2 次関数の決定問題

与えれた条件から放物線の方程式を求める問題です．言い換えると，与えられた条件から 2 次関数を求めるとか 2 次関数の決定問題といいます．

1.1　パターンは 3 つ

2 次関数の決定

- 一般形

  $y = ax^2 + bx + c$

  3 点の条件が与えれた場合に利用する

- 平方完成形

  $y = a(x-p)^2 + q$

  軸や頂点の座標が与えられた場合に利用する

- 因数分解形

  $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

  二つの解や x 軸との二つの交点が与えられた時に利用する

2　問題 148

平方完成形を利用することが問題文に記載があります．

1. **頂点の座標が** $(3,5)$**，点** $(0,-4)$ **を通る**

   条件から $p = 3, q = 5$ であることがわかる．

   よって，$y = a(x-3)^2 + 5$ と書ける．

   これが点 $(0,-4)$ を通る事から，$-4 = a(0-3)^2 + 5$

   これを解いて，$a = -1$

   よって，求める 2 次関数は $y = -(x-3)^2 + 5$ である．

2. **頂点が y 軸上，2 点 $(-1,1),(2,-5)$ を通る**

   「頂点が y 軸上」という意味は，頂点の x 座標，つまり $p=0$ である．

   よって，$y=ax^2+q$ と書ける．これが「2 点 $(-1,1),(2,-5)$ を通る」ことから

   $$\begin{cases} 1=a+q \\ -5=4a+q \end{cases}$$

   これを解いて，$a=-2,q=3$

   よって，求める 2 次関数は $y=-2x^2+3$

3. **対称軸が $x=2$，2 点 $(0,5),(3,2)$ を通る**

   対称軸の条件より求める 2 次関数を $y=a(x-2)^2+q$ とする．これが「2 点 $(0,5),(3,2)$ を通る」ことより

   $$\begin{cases} 5=4a+q \\ 2=a+q \end{cases}$$

   が得られる．

   これを解いて，$a=1,q=1$

   よって，求める 2 次関数は $y=(x-2)^2+1$

3 問題 149

2 次関数決定問題です．

1. 3 点の座標が与えられています．

   求める 2 次関数を

   $$y=ax^2+bx+c \tag{1}$$

   とおく．これが 3 点 $(1,0),(0,3),(2,1)$ を通過することから，式 1 に代入する．

   $$\begin{cases} 0=a+b+c \\ 3=c \\ 1=4a+2b+c \end{cases}$$

   を得る．

   これを解いて $a=1,b=-4,c=3$ となる．これより, 求める 2 次関数は $y=x^2-4x+3$ である．

   これを平方完成して $y=(x-2)^2-1$

   これより,

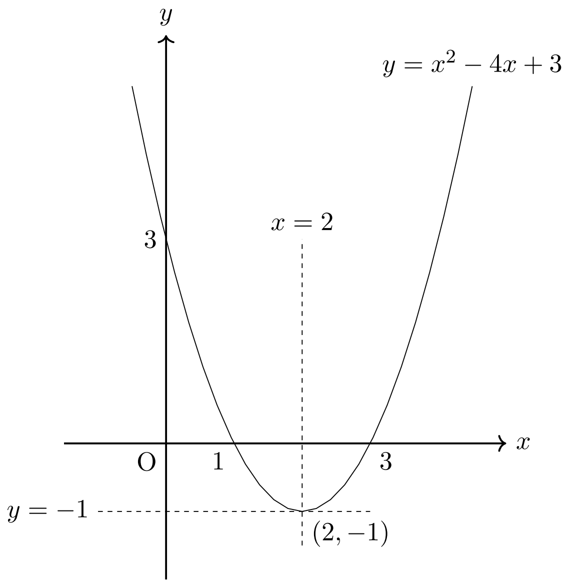

図 1: 問題 149(1)

頂点の座標	$(p, q) = (2, 1)$
対称軸	$x = 2$
x 軸との交点	$x = 3, x = 1$ で交わる
y 軸との交点	$y = 3$

2. **x 軸との交点と y 軸との交点の 3 点の座標が与えられています．**

x 軸との交点が与えられているので $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ を利用するか, $y = ax^2+bx+x$ を利用するかのいずれかですが計算が簡単になる方を選びましょう．時間があるときに両方やってみるのも良いかもしれません．

(a) オーソドックスに $y = ax^2 + bx + c$ を使う

題意より 3 点 $(3, 0), (-2, 0), (0, 6)$ を 2 次式 $y = ax^2 + bx + c$ を満たすことから,

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + c \\ 0 = 4a - 2b + c \\ 6 = c \end{cases}$$

を得る．

これを解いて $a = -1, b = 1, c = 6$ を得る．よって求める 2 次関数は

$y = -x^2 + x + 6$ である．

平方完成をおこない，$y = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{4}$

(b) $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ を利用する

題意より x 軸との交点が $3, -2$ であることから，$y = a(x - 3)(x + 2)$ を得る．

この式が $(0,6)$ を満たすことから

$$\begin{aligned} 6 &= a(0-3)(0+2) \\ &\text{これを解いて} \\ 6 &= -6a \\ a &= -1 \end{aligned}$$

よって，$y=-(x-3)(x+2)$ となり，これを展開して $y=-x^2+x+6$
あとは，一緒ですね．

4 問題 158

1. 頂点が $(2,-5)$，点 $(0,7)$ を通る

   求める 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおくと．与えられた条件より $p=2, q=-5$ となる．

   よって，$y=a(x-2)^2-5$，これが点 $(0,7)$ を満たすことから

   $7=a(0-2)^2-5$ を解いて

   $a=3$

   よって，求める 2 次関数は $y=3(x-2)^2-5$

2. 軸が $x-1$ で 2 点 $(0,1)$，$(-3,7)$ を通る

   求める 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおくと．与えられた条件より $p=-1$ である．

   よって，$y=a(x+1)^2+q$，これが点 $(0,1)$，$(-3,7)$ を通ることから

   $$\begin{cases} 1=a(0+1)^2+q \\ 7=a(-3+1)^2+q \end{cases}$$

   を得る．これを解いて

   $a=2, q=-1$

   よってもとめる 2 次関数は $y=2(x+1)^2-1$

3. 3 点 $(1,0)$，$(0,1)$，$(2,3)$ を通る

   求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおくと，これを満足する 3 点の条件より

   $$\begin{cases} 0=a+b+c \\ 1=c \\ 3=4a+2b+c \end{cases}$$

   を得る．これを解いて $a=2, b=-3, c=1$. 求める 2 次関数は $y=2x^2-3x+1$