3 章関数とグラフ

第 1 節　2 次関数

Basic と Check 問題 152 と 162 の解説　pp.32-33

1　文章題

文章題の基本は「文章表現を数式に落とし込み，条件より定義域を明らかにする，ことです．

例題 1 対角線の長さの和が 20[*cm*] のひし形の *(1)* 面積の最大値，*(2)* 周の長さの最小値を求めなさい．

1. 図を書きます．

   (a) ひし形を書きます．

   (b) 頂点に名前をつけましょう．対角線の長さが必要なので線分 $\overline{AC}$ を $x[cm]$，線分 $\overline{BD}$ を $y[cm]$ として図に記入します．対角線は直交しますので角 $90°$ の記号を記入します．

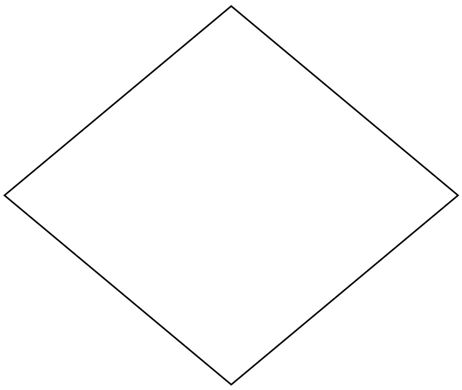

図 1: ひし形

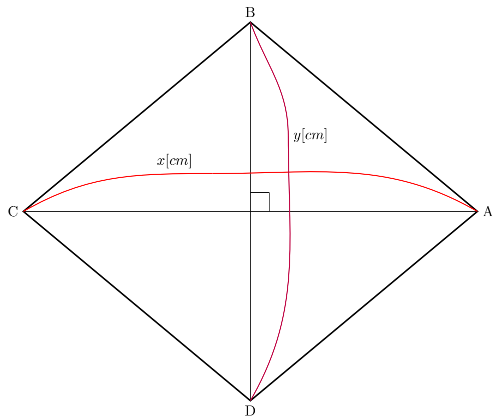

図 2: 各部に命名

2. 面積を求める式を創り出します．

対角線の和が 20[*cm*] とうことから $x+y=20$，対角線が直交していることから四角形の面積 (S) は $S = xy\frac{1}{2}$ で求めることができる．

よって，次の連立方程式を導き出すことができます．

$$x + y = 20 \tag{1}$$
$$S = \frac{xy}{2} \tag{2}$$

式 *1* より $y = 20 - x$，これを式 *2* に代入して

$$S = \frac{x(20-x)}{2} \tag{3}$$

S は x の関数とみなして，$S(x)$ の最小値を求めれば良いことになる．このとき，x の定義域は $x > 0$，$y > 0$，$y = 20 - x > 0$ より $0 < x < 20$ となる．

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x(20-x)}{2} &(4)\\ &= -\frac{1}{2}(x-10)^2 + 50 &(5) \end{aligned}$$

これより，$x = 10$ のとき，$S(x)$ は最大値 50 を取る．$x = 10$ は定義域内にある．*(グラフは省略します．)*

3. 周の長さを表す式を作ります．

(a) 図 *2* の対角線の交点に O を記入します．また，ひし形の定義は４辺の長さが等しい４角形なので周長を l とすると一辺は $\frac{l}{4}$ となります．

(b) 線分 $\overline{AB} = \dfrac{l}{4}$，線分 $\overline{AO} = \dfrac{x}{2}$，線分 $\overline{BO} = \dfrac{y}{2}$ と表現できます．この３つの線分の関係は三平方の定理より

$$\begin{aligned} \left(\overline{AB}\right)^2 &= \left(\overline{AO}\right)^2 + \left(\overline{BO}\right)^2 \\ \left(\frac{l}{4}\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ l^2 &= 4x^2 + 4y^2 \\ l^2 &= 4x^2 + 4(20-x)^2 \\ &= 4x^2 + 4(400 - 40x + x^2) \\ &= 5x^2 - 160x + 1600 \\ &= 5\left\{x^2 - 32x\right\} + 1600 \\ &= 5\left\{x^2 - 32x + 16^2 - 16^2\right\} + 1600 \\ &= 5(x-16)^2 - 5x16^2 + 1600 \\ &= 5(x-16)^2 + 320 \end{aligned}$$

l^2 は $x = 16$ のとき最小値 $l^2 = 320$ を取る．題意より $l > 0$ なので，l^2 が最小値のとき l も最小値となる．

よって，$x = 16[cm]$ のとき $l = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}[cm]$ となる．

2　問題 152

三角形の高さを $h[cm]$ とし三角形の面積を S とすると，条件より

$$x + h = 8$$
$$S = \frac{xh}{2}$$

式??より $h = 8 - x$，これを??に代入する．

$$S(x) = \frac{x(8-x)}{2}$$
$$S(x) = \frac{1}{2}(8x - x^2)$$
$$= -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$$

上式より，この三角形の面積は $x = 4[cm]$ のときに最大値 $S = 8[cm^2]$ を取る．

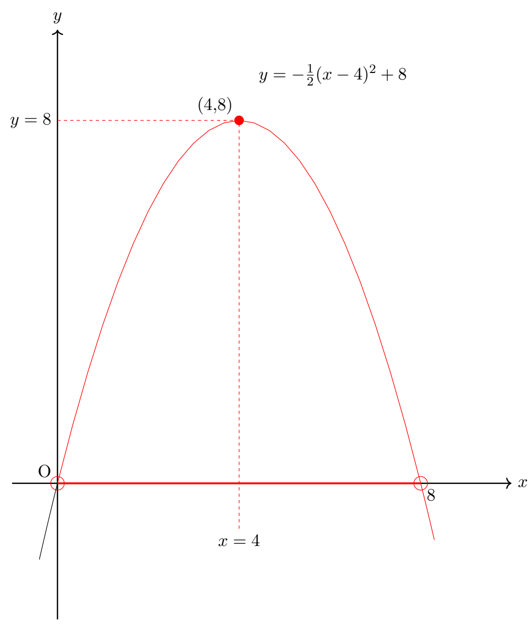

図 3: 問題 152 のグラフ

3　問題 162

断面積の面積を S とすると，題意より

$$\begin{aligned} S(x) &= x(16-2x) \\ &= 16x-2x^2 \\ &= -2(x^2-8x) \\ &= -2\{x^2-8x+16-16\} \\ &= -2\{(x-4)^2-16\} \\ &= -2(x-4)^2+32 \end{aligned} \tag{6}$$

式 *6* より，$x=4[cm]$ のときに最大値 $S(x)=32[cm^2]$ となる．

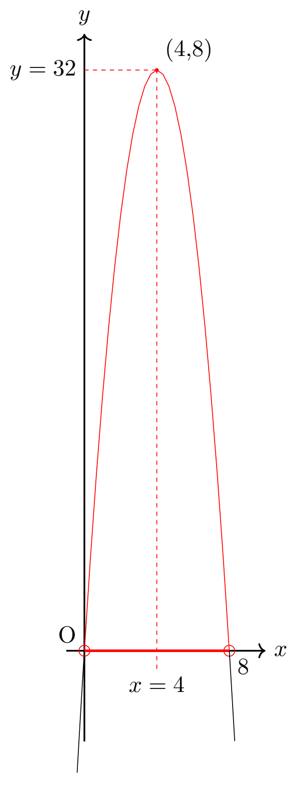

図 4: 問題 162 のグラフ