3 章関数とグラフ

第 1 節　2 次関数

Basic と Check 問題 153,154 と 163 の解説　pp.32　2021 年 10 月 10 日

1　関数同士の交点 (共有点)

$y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ という二つの関数がある．この二つの関数が交わるとするとある x の値のときに $y_1 = y_2$ ということを意味している．よって，交点 (共有点) の x 座標を求めるためには $y_1 = y_2$ とする方程式を解けば良い．

これから暫くの間は次のパターンとなります．

1. x 軸との交点を見つける問題
   $y = 0$ としたときの x の値をみつけること
   (a) 2 点で交わる
   (b) 1 点で交わる (接する)
   (c) 交わらない (共有点を持たない)
2. 2 次関数と 1 次関数との交点を見つける問題
   $y_1 = y_2$ とおいて方程式を解く
   (a) 2 点で交わる
   (b) 1 点で交わる (接する)
   (c) 交わらない (共有点を持たない)

判別式の活用

前述のいずれの場合でも 2 次方程式を解くことになるので，判別式 (D) を活用することになる．

- $D > 0$ の場合は交点を二つ持つ
- $D = 0$ の場合は交点を一つ持つ
- $D < 0$ の場合は交点を持たない

2　問題 153

x 軸との共有点 (交点) を調べる問題であるので, $y=0$ として判別式 D を調べる. $D \geq 0$ の場合は解を持つので実際に解けば共有点が求まる.

2.1　153(1)

与式は $y=2x^2+5x+1$ である.

1. $y=0$ として判別式 D をチェックする

   $D=5^2-4\times 2\times 1=17\geq 0$

   共有点が 2 点

2. $y=0$ として 2 次方程式を解く

$$
\begin{aligned}
2x^2+5x+1&=0\\
x&=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2x2}\\
x&=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4} \quad x\text{ 軸との交点の値}
\end{aligned}
$$

3. グラフを書く
   平方完成を行う

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2+5x+1\\
&=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+1\\
&=2\left\{x^2+2\frac{5}{4}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}+1\\
&=2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{25}{16}\right)\right\}+1\\
&=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+1\\
&=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{17}{8}
\end{aligned}
$$

頂点の座標は $\left(-\frac{5}{4},-\frac{17}{8}\right)$

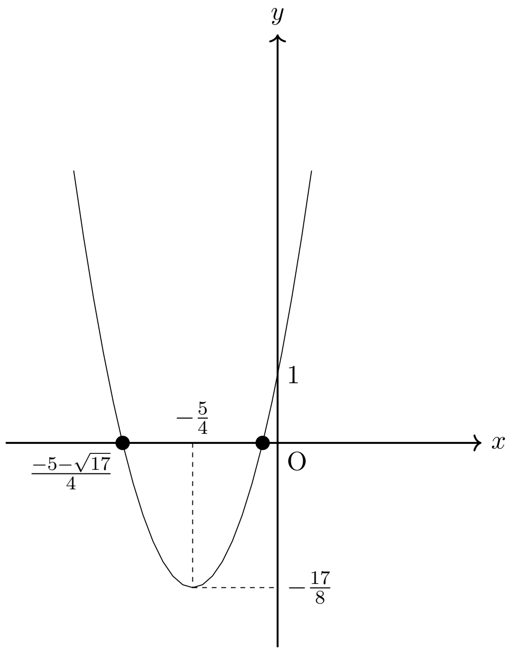

図 1: 問題 153(1)

2.2　153(2)

与式は $y = 3x^2 - 7x + 5$ である．

(a) $y = 0$ として判別式 D をチェックする
$D = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 49 - 60 = -11 < 0$
よって，交点は持たない．

平方完成する．

$$
\begin{aligned}
y &= 3x^2 - 7x + 5 \\
&= 3(x^2 - \frac{7}{3}x) + 5 \\
&= 3(x^2 - 2\frac{7}{6}x + (\frac{7}{6})^2 - (\frac{7}{6})^2) + 5 \\
&= 3(x^2 - \frac{7}{6})^2 - 3 \times (\frac{7}{6})^2 + 5 \\
&= 3(x^2 - \frac{7}{6})^2 + \frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

頂点の座標は $\left(\frac{7}{6}, \frac{11}{12}\right)$ で x 軸より上，また下に凸のグラフなので x 軸とは交わらない．

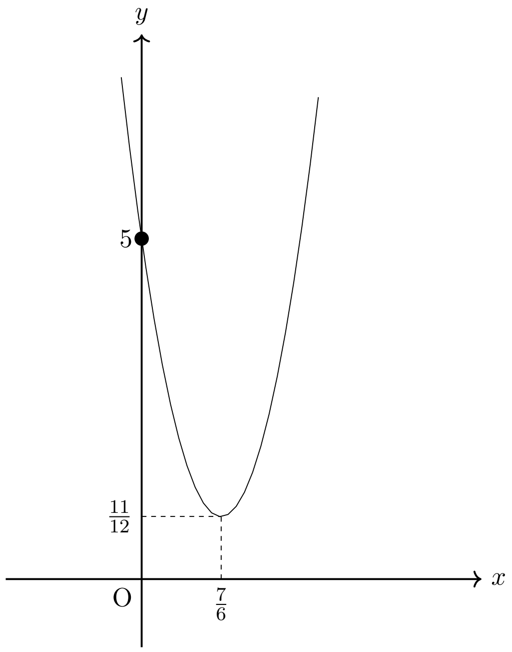

図 2: 問題 153(2)

2.3　153(3)

与式は $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ である．

(a) $y = 0$ として判別式 D をチェックする
$D = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 3 = 4 - 4 = 0$
よって，共有点は一つ (x 軸と接する) である．

(b) 平方完成を行う

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \\ &= \frac{1}{3}(x^2 - 6x) + 3 \\ &= \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9 - 9) + 3 \\ &= \frac{1}{3}\{(x-3)^2 - 9\} + 3 \\ &= \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{1}{3} \times 9 + 3 \\ &= \frac{1}{3}(x-3)^2 \end{aligned}$$

よって，$x = 3$ で x 軸と接する．図 3 を参照のこと．

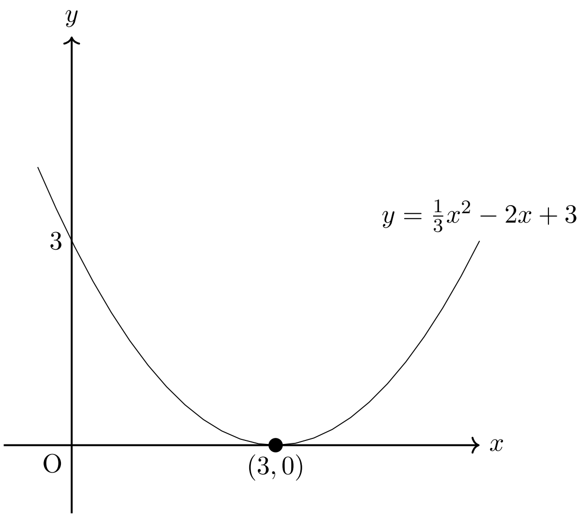

図 3: 問題 153(3)

3　問題 154

x 軸との共有点 (交点) を調べる問題であるので，$y=0$ として判別式 D を調べる．

3.1　154(1)

与式は $y=x^2+3x+k$ である．

1. 判別式 D をチェックする

   $D=3^2-4\times1\times k=9-4k$

   共有点を 2 点持つための条件なので $D>0$ である．

   よって，$9-4k>0$ を解いて，$k<\dfrac{9}{4}$ である．

3.2　154(2)

与式は $y=4x^2-2kx+9$ である．

1. 判別式 D をチェックする

   $D=(-2k)^2-4\times4\times9=4k^2-144$

   x 軸と接するためには $D=0$ なので $4k^2-144=0$ を解けば良い．

   $k=\pm6$

3.3　154(3)

与式は $y=kx^2+x-1$ である．

1. 判別式 D をチェックする

   $D=(1)^2-4\times k\times(-1)=1+4k$

   よって，共有点は一つ (x 軸と接する) である．

4　問題 163

x 軸との交点の条件を見出す問題

与式を $y=0$ として判別式 D を調べる．$D>0,\ D=0,\ D<0$ の場合分けで調べる．
不等式を解くことになる．

与式は $y=x^2-6x-k$ を $y=0$ として判別式 D を求める．
$D=(-6)^2-4\times 1\times(-k)=36+4k$

1. x 軸と 2 点で交わる

$$
\begin{aligned}
D &> 0 \text{ より} \\
36+4k &> 0 \\
4k &> -36 \\
k &> -9
\end{aligned}
$$

2. x 軸に接する

$$
\begin{aligned}
D &= 0 \text{ より} \\
36+4k &= 0 \\
4k &= -36 \\
k &= -9
\end{aligned}
$$

3. x 軸と交わらない

$$
\begin{aligned}
D &< 0 \text{ より} \\
36+4k &< 0 \\
4k &< -36 \\
k &< -9
\end{aligned}
$$