3 章関数とグラフ
第 1 節　2 次関数
Basic と Check 問題 155，164 の解説　pp.32　2021 年 10 月 11 日

1　2 次不等式の問題

解き方

与えられた不等式を $y = 0$ というように 2 次方程式として取り扱う．

- 判別式 D の正負を調べ x 軸との交点を調べる
- 簡易形式でグラフを書く．x 軸との交点と下に凸か上に凸かがポイント
- 2 次不等式が $> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$ によって x 軸の上部か下部かが決まる

2　問題 155

2.1　155(1)

1. 与式を 2 次方程式とみなして解く

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4x + 3 &= 0 \\
(x+3)(x+1) &= 0 \\
x = -3, x &= -1
\end{aligned}
$$

x^2 の係数が正なので下に凸のグラフとなり，x 軸との交点は $x = -3, -1$ でありこの両点は定義域に含まれているので値域にも含まれる．
よって，求める解は $x \leq -3$ と $x \geq -1$ である．グラフ図 1 を参照．

2.2　155(2)

1. 与式を 2 次方程式とみなして解く

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x - 1 = 0 & \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1)}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\
&= 1 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

よって，$x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$

2. x^2 の係数が正なので下に凸のグラフとなり，x 軸との交点は $x = 1-\sqrt{2}$ と $x = 1+\sqrt{2}$ であり，この両点は定義域に含まれていないので値域には含まれない．よって，求める解は $1 - \sqrt{2} < x1 + \sqrt{2}$ である．グラフ図 2 を参照．

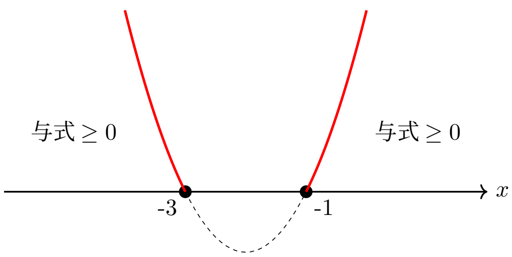

図 1: 問題 155(1)

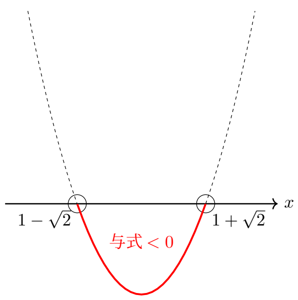

図 2: 問題 155(2)

2.3　155(3)

1. 与式を 2 次方程式とみなして解く

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ &= (x-3)^2 \\ \text{よって，} x &= 3 \end{aligned}$$

2. x^2 の係数が正なので下に凸のグラフとなり，x 軸との交点は $x = 3$，このとき $y = 0$ であるので条件より，求める解は $x \neq 3$($x = 3$ を除く実数 x) となる．

2.4　155(4)

1. 与式を 2 次方程式とみなして解く

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= 0 \\ (x - \frac{3}{2})^2 &= 0 \\ \text{よって，} x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. x^2 の係数が正なので下に凸のグラフとなり，x 軸との交点は $x = \frac{3}{2}$，このとき $y = 0$ であるので，条件を満たす x は存在しない．グラフ図 4 からもわかります．

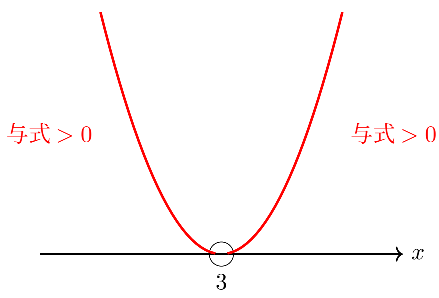

図 3: 問題 155(3)

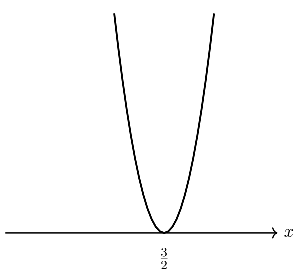

図 4: 問題 155(4)

2.5　155(5)

1. 与式を平方完成してみる．

$$
\begin{aligned}
-x^2+x-\frac{1}{4} &= -(x^2-x+\frac{1}{4}) \\
&= -(x^2-2\times\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2 \\
&= -(x-\frac{1}{2})^2
\end{aligned}
$$

2. よって与式 $-x^2+x-\frac{1}{4}\leq 0$ は常に成立する

2.6　155(6)

1. 与式を平方完成してみる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2-4x+8 &= \frac{1}{2}(x^2-8x+16) \\
&= \frac{1}{2}(x-4)^2
\end{aligned}
$$

2. $\frac{1}{2}(x-4)^2\leq 0$ が成立するのは $x=4$ の場合だけである．

2.7　155(7)

1. 与式を平方完成してみる．

$$
\begin{aligned}
-4x^2+6x-3 &= -4(x^2-\frac{6}{4}x)-3 \\
&= -4\left\{x^2-2\times\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-3 \\
&= -4\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-3 \\
&= -4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+4\left(\frac{9}{16}\right)-3 \\
&= -4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}-\frac{12}{4}\right) \\
&= -4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}
$$

2. よって，全ての x について $-4x^2+6x-3<0$ は常に成立する．
3. 判別式 D を調べると $D=-12<0$

2.8　155(8)

1. 与式を平方完成してみる．

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 3 &= 2(x^2 - 2x) + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= 2(x-1)^2 - 2 + 3 \\ &= 2(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

2. $2(x-1)^2 + 1 > 0$ なので，$2x^2 - 4x + 3 \leq 0$ を満たす x は存在しない，解なしである．

3. 判別式 D を調べると $D = -8 < 0$

3　問題 164

3.1　164(1)

1. 与式 $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ の左辺を因数分解する．

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 3x - 2 &\leq 0 \\
(2x+1)(x-2) &\leq 0
\end{aligned}
$$

x^2 の係数が正なので下に凸のグラフとなり，x 軸との交点は $x = -\dfrac{1}{2}, 2$ である．
よって，求める解は $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$ である．

3.2　164(2)

1. 与式 $x^2 + 8x + 16 \geq 0$，左辺を平方完成して解く

$$
\begin{aligned}
x^2 + 8x + 16 &\geq 0 \\
(x+4)^2 &\geq 0 \text{ は常に成立する}
\end{aligned}
$$

2. x^2 の係数が正なので下に凸のグラフとなり，x 軸との交点は $x = -4$ で接するので求める解は全ての実数 x である．

3.3　164(3)

1. 与式 $3x^2 + 6x + 4$ の判別式 D を調べる

$$
\begin{aligned}
D &= 6^2 - 4 \times 3 \times 4 \\
&= 36 - 48 \\
&= -12
\end{aligned}
$$

2. $D < 0$ なので x 軸との交点は持たない．
3. 与式の左辺を平方完成する．

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 6x + 4 &= 3(x^2 + 2x + \frac{4}{3} \\
&= 3\left\{(x^2 + 2x + 1) - 1 + \frac{4}{3}\right\} \\
&= 3(x+1)^2 - 3\left(\frac{3}{3} + \frac{4}{3}\right) \\
&= 3(x+1)^2 + 1 > 0
\end{aligned}
$$

なので解なし．