3 章関数とグラフ
第 2 節　いろいろな関数
Basic 問題の解説　pp.37

1　基本的知識

1.1　分数関数

1.1.1　グラフを書いてみる

分数関数の基本のグラフを図 1 に示している．分数式 $y = \dfrac{1}{x}$ において**分母** $\neq 0$ は暗黙の了解事項なので問題文には記載されていなくても条件として使うことができます．ここでは，$x \neq 0$ である．これはしっかり覚えておくこと．言い換えると，定義域は $x = 0$ を除く実数 x の全範囲である．

x の値が大きくなるに連れて y の値はゼロに近づいていく，逆に x の値が小さくなるに連れて y の値は大きくなっていく，このとき x 軸や y 軸にせっすることはない．これらを**漸近線** *(***ぜんきんせん***)* **という．**

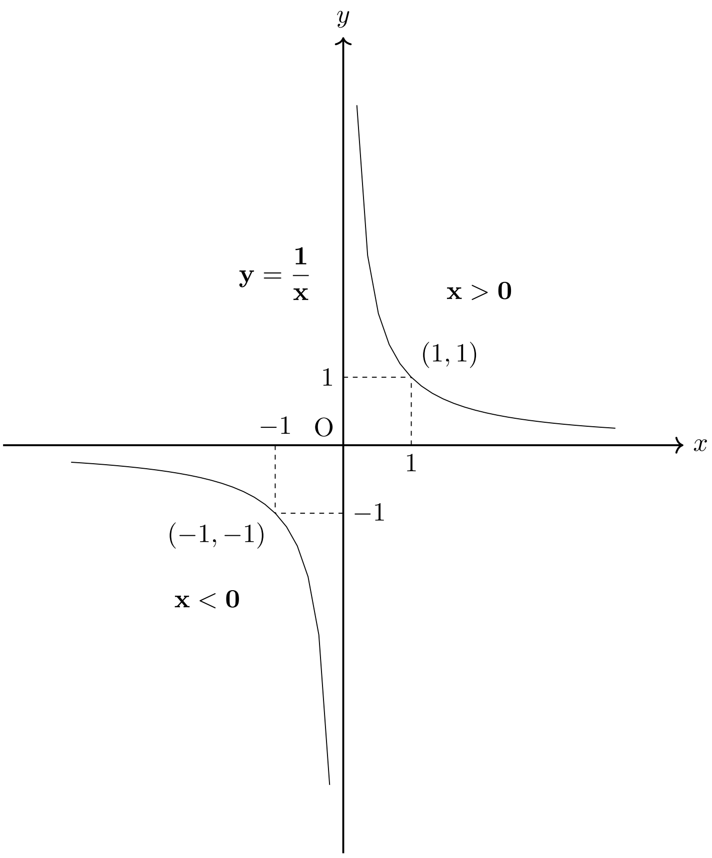

図 1: 分数関数のグラフ (基本)

グラフの曲がり具合を調べるために表 *1* の表を作成しグラフ用紙にプロットし曲線を描いて見なさい．スプレッドシートを用いいて刻み幅をもっと小さくしてより精度の高いグラフを書いてみると良いでしょう．

x	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$1/x$														1.0

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
$1/x$										0.5				

表 1: $\frac{1}{x}$ の計算値

1.1.2 平行移動

分数関数の一般形は

$$f(x) = \frac{a}{x-p} + q, (x \neq p)$$

と表現できる．平行移動はこれまで学習した事項を使って簡単に行える．

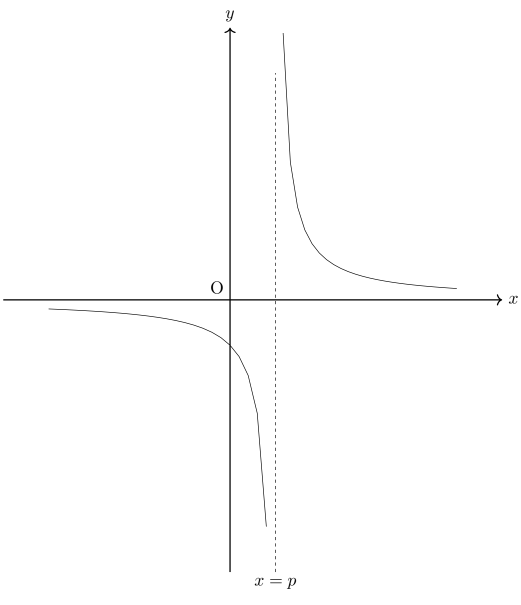

図 2: x 軸方向に p だけ平行移動

.

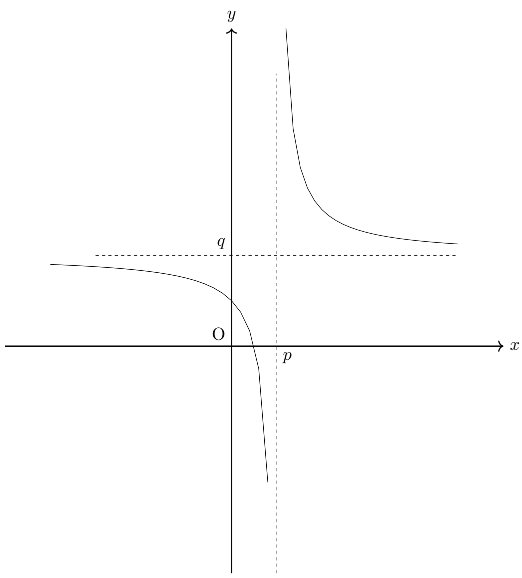

図 3: さらに y 軸方向に q 平行移動

1.2 無理関数

根号 *(* ルート *)* の中に変数がある関数と考えておけば大丈夫です．たとえば，

$$\sqrt{x}, \qquad \sqrt{3x+2}, \qquad \sqrt[3]{\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}}$$

があります．

ここで取り扱う無理関数の一般形は

$$y = \sqrt{ax+b} + c, \quad (ax+b \geq 0)$$

という形の一次無理関数です．

では，もっとも基本となる $y=\sqrt{x}$ のグラフから見ていきましょう．グラフ作成は次の二つの方法から理解することができます．

$\sqrt{x}$ を実際に計算してプロットしていきます．表計算ツールをつかって計算値を求めて作図機能を使えば簡単にできます．

x	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\sqrt{x}$														1.0
x	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
$\sqrt{x}$					1.412					1.732	2.0			

表 2: 平方根の計算値

$y=\sqrt{x}$ の両辺を平方すると $y^2=x$ が得られ，縦軸を x とし横軸を y とすると y の 2 次関数と捉えることができてグラフが書けますね．この二つの方法で作成したグラフを以下に掲示します．この二つは同じものであることがお解り頂けると思います．

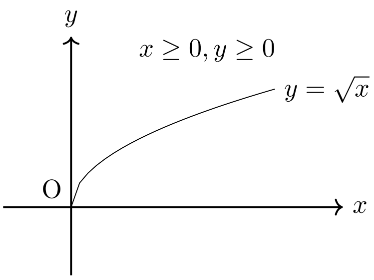

図 4: $y=\sqrt{x}$ のグラフ

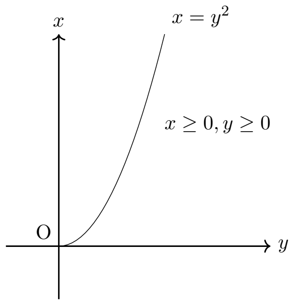

図 5: $x=y^2$ のグラフ

図 5 より推察しますに，$y<0$ の場合もグラフは存在することが可能ですので $y=-\sqrt{x}$ を考えれば良いことになる．x 軸上で負，つまり $x<0$ の場合は $y=\sqrt{-x}$ とすれば良いこともわかる．よって図 4 を基本として，他に 3 つの場合がある．それらを次に示す．

1.2.1 無理関数の平行移動

1 次無理関数の一般系は

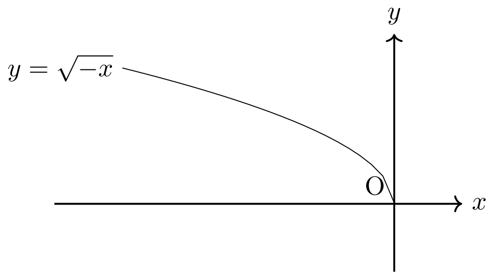

図 6: $y=\sqrt{-x}$ のグラフ

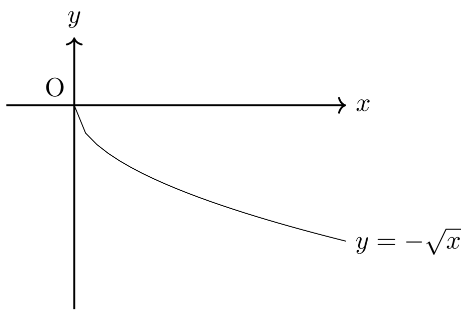

図 7: $y=-\sqrt{x}$ のグラフ

$$y=\sqrt{x-p}+q$$

と表現される．これは $y=\sqrt{x}$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q それぞれ平行移動したものである．

2　問題の解説

2.1 問題 171

偶関数か奇関数かを調べる問題．

偶関数と奇関数の調べ方

$f(-x) = f(x)$ **が成立すると偶関数，** y **軸対称**
$f(-x) = -f(x)$ **が成立すると奇関数，** x **軸対称**

2.1.1 171-(1):$y = 3x^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 \\ f(-x) &= 3(-x)^2 \\ &= 3x^2 \\ \therefore f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

偶関数である．

2.1.2 171-(2)：$y = x - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 \\ f(-x) &= (-x) - 1 \\ &= -x - 1 \\ \{f(-x) \neq f(x)\} \wedge \{f(-x) &\neq -f(x)\} \end{aligned}$$

偶関数，奇関数のいずれでもない．

2.1.3 171-(3)：$y = -2x$

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x \\ f(-x) &= -2(-x) \\ &= 2x \\ \therefore f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

よって奇関数である．

2.1.4　171-(4)：$y = x^2 + x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + x \\
f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\
&= x^2 - x \\
\{f(-x) \neq f(x)\} \wedge \{f(-x) &\neq -f(x)\}
\end{aligned}
$$

よって，偶関数，奇関数のいずれでもない．

2.1.5　171-(5)：$x^4 + 5x^2 - 3$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 5x^2 - 3 \\
f(-x) &= (-x)^4 + 5(-x)^2 - 3 \\
&= x^4 + 5x^2 - 3 \\
\therefore f(-x) &= f(x)
\end{aligned}
$$

よって偶関数である．

2.1.6　171-(6)：$y = (x-1)^5$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)^5 \\
f(-x) &= \{(-x) - 1\}^5 \\
&= (-x-1)^5 \\
&= \{-(x+1)\}^5 \\
&= -(x+1)^5 \\
\{f(-x) \neq f(x)\} \wedge \{f(-x) &\neq -f(x)\}
\end{aligned}
$$

よって，偶関数，奇関数のいずれでもない．

2.1.7　171-(7)：$y = \dfrac{1}{4}x^3$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^3 \\ f(-x) &= \frac{1}{4}(-x)^3 \\ &= -\frac{1}{4}x^3 \\ \therefore f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

よって奇関数である.

2.1.8　171-(8)：$y = \dfrac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2} \\ f(-x) &= \frac{1}{(-x)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \\ \therefore f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

よって偶関数である.

2.1.9　171-(9)：$y = \dfrac{(x^2+3)^2}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2+3)^2}{x} \\ f(-x) &= \frac{((-x)^2+3)^2}{(-x)} \\ &= -\frac{(x^2+3)^2}{x} \\ \therefore f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

よって奇関数である.

2.2　問題 172

$y = x^3$ と $y = x^4$ のグラフを図 *8* と図 *9* にそれぞれ掲示しておきます．小問はこのグラフの平行移動に関するものです．

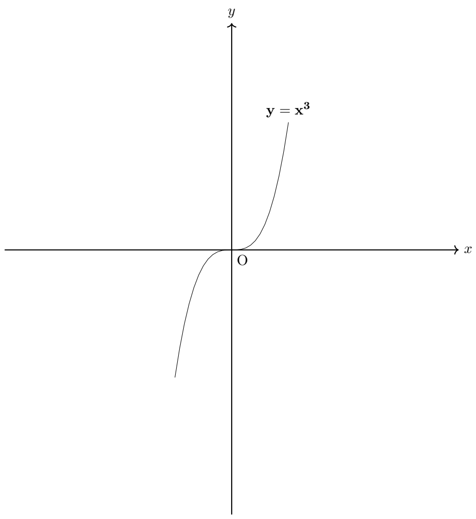

図 8: x^3 のグラフ

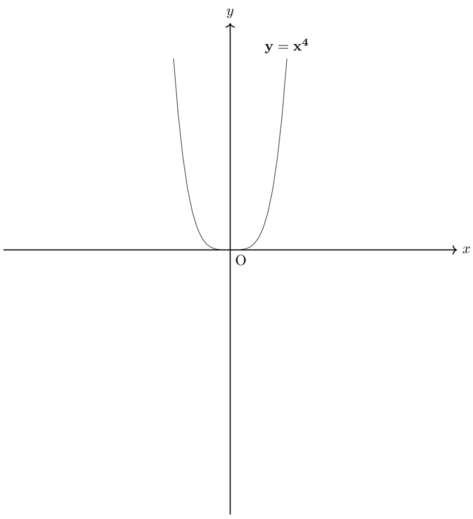

図 9: $y = x^4$ のグラフ

2.2.1　172(1)

$y = (x-1)^3 + 2$ は $y = x^3$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．結果を図 *10* に示しています．

2.2.2　172(2)

$y = -(x+1)^3 + 2$ は $y = x^3$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．結果を図 *11* に示しています．

2.2.3　172(3)

$y = (x+1)^4 - 2$ は $y = x^4$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したものである．結果を図 *12* に示しています．

2.2.4　172(4)

$y = -(x-2)^4 + 1$ は $y = x^4$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 平行移動したものである．結果を図 *13* に示しています．

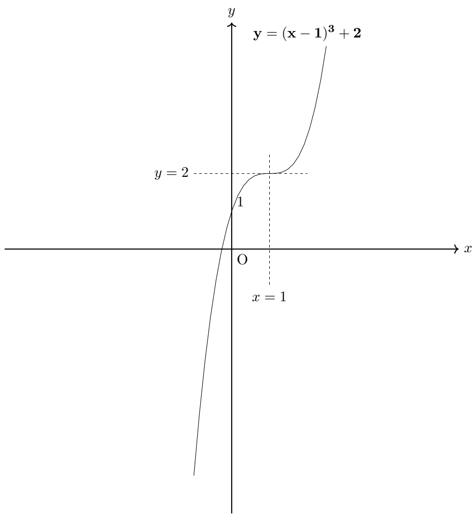

図 10: 172(1) のグラフ

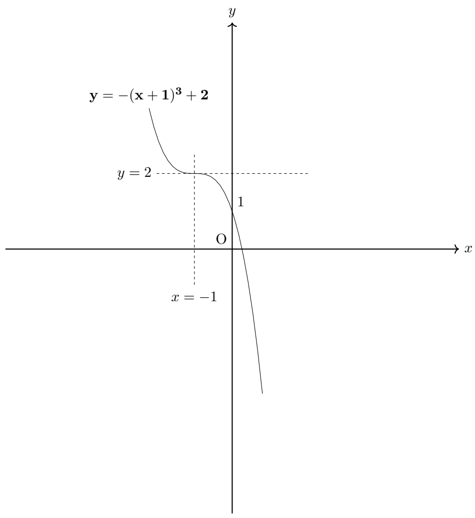

図 11: 172(2) のグラフ

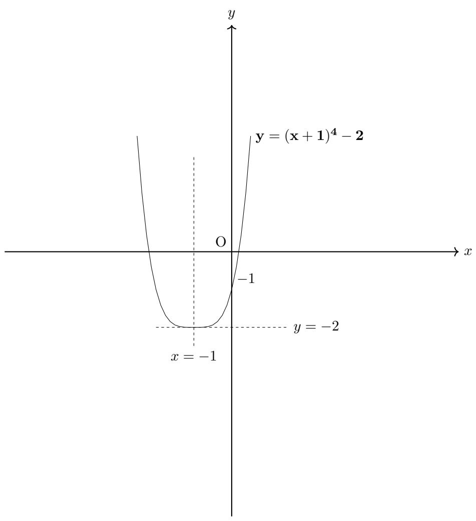

図 12: 172(3) のグラフ

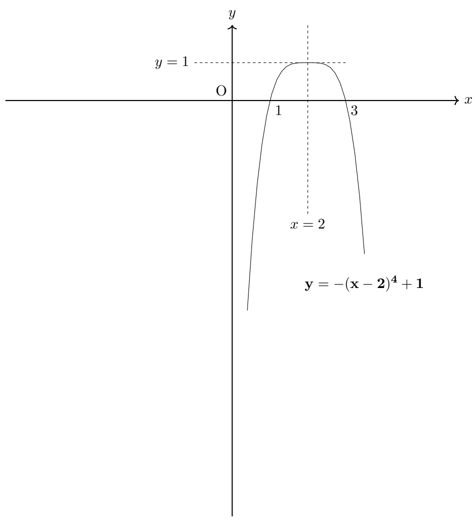

図 13: 172(4) のグラフ

2.3　問題 173

小問で与えられている分数関数が $y = \dfrac{a}{x-p} + q$ という基本形なので分数関数の基本にしたがって解答は導き出されます．

2.3.1　173(1)

$$y = \frac{1}{x-2} + 1$$

漸近線　$x = 2$ と $y = 1$
定義域　$x = 2$ を除く，実数 x の全範囲
値域　$y = 1$ を除く，実数 y
グラフ　図 *14*

2.3.2　173(2)

$$y = \frac{2}{x+1} - 2$$

漸近線　$x = -1$ と $y = -2$
定義域　$x = -1$ を除く，実数 x の全範囲
値域　$y = 1$ を除く，実数 y の全範囲
グラフ　図 *15*

2.3.3　173(3)

$$y = -\frac{1}{x-3} + 1$$

漸近線　$x = 3$ と $y = 1$
定義域　$x = 3$ を除く，実数 x の全範囲
値域　$y = 1$ を除く，実数 y の全範囲
グラフ　図 *16*

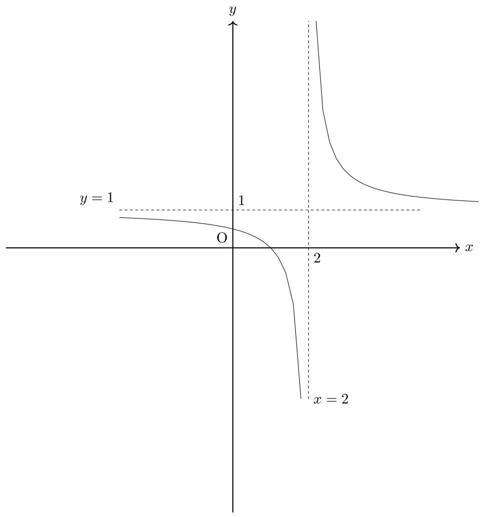

図 14: (1) $y = -\dfrac{1}{x-2} + 1$ のグラフ

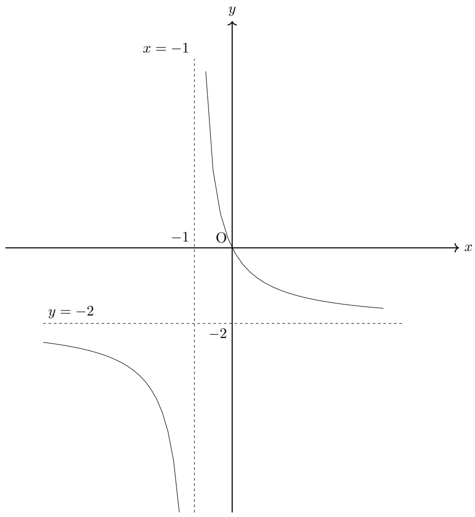

図 15: (2) $y = \dfrac{2}{x+1} - 2$ のグラフ

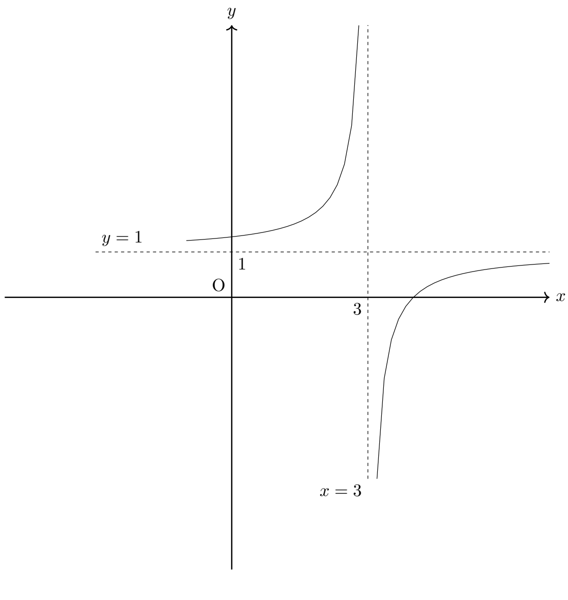

図 16: (1) $y = -\dfrac{1}{x-3} + 1$ のグラフ

2.4　問題 174

与式を見ますと分母と分子ともに x に関して *1* 次式なので，実際に割り算を行って $y = \dfrac{a}{x-p} + q$ の形にします．

2.4.1　174(1)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x+3}{x+1} \\
&= \frac{(x+1)+2}{x+1} \\
&= 1 + \frac{2}{x+1} \\
&= \frac{2}{x+1} + 1
\end{aligned}
$$

漸近線　$x = -1$ と $y = 1$
定義域　$x = -1$ を除く，実数 x の全範囲 *(*$x \neq -1$*)*
値域　$y = 1$ を除く，実数 y の全範囲 *(*$y \neq 1$*)*
グラフ　図 *17*

2.4.2　174(2)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2x-5}{x-2} \\
&= \frac{2(x-2)-1}{x-2} \\
&= 2 + \frac{-1}{x-2} \\
&= 2 - \frac{1}{x-2} \\
&= -\frac{1}{x-2} + 2
\end{aligned}
$$

漸近線　$x = 2$ と $y = 2$
定義域　$x = 2$ を除く，実数 x の全範囲 *(*$x \neq 2$*)*
値域　$y = 2$ を除く，実数 y の全範囲 *(*$y \neq 2$*)*
グラフ　図 *18*

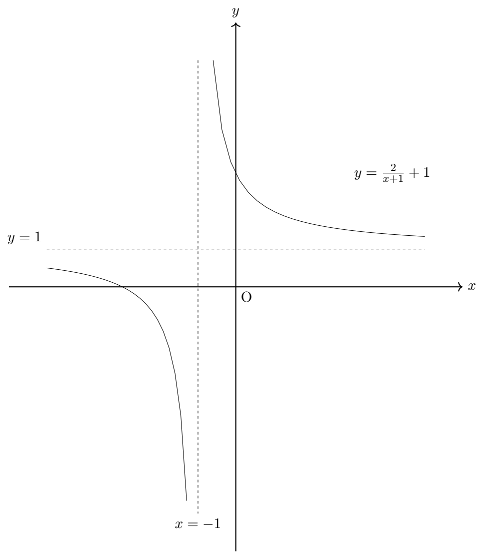

図 17: 174-(1) のグラフ

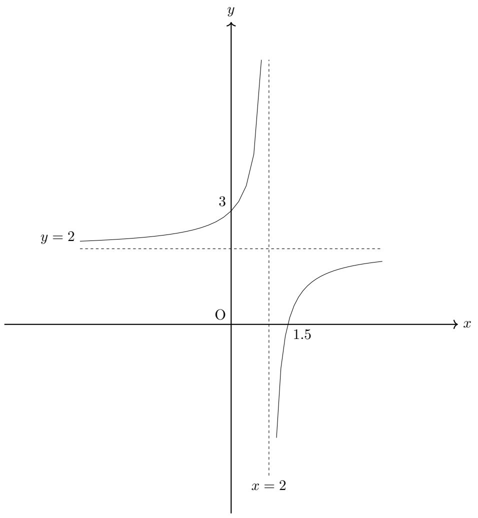

図 18: 174-(2) のグラフ

2.5　問題 175

2.5.1　175(1)

与えられた無理関数は

$$y = \sqrt{x-2}$$

である．よって，定義域や値域は次の通りである．

定義域	$x - 2 \geq 0$
	$x \geq 2$
値域	$y \geq 0$
グラフ	図 *17*

2.5.2　175(2)

与えられた無理関数は

$$y = \frac{-3}{\sqrt{x+1}}$$

である．よって，

定義域	$x + 1 > 0$　根号の内部 $\geq 0,$ 分母 $\neq 0$
	$x > -1$
値域	$y < 0$
グラフ	図 *21*

【注意】

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \tag{1}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{2}$$

式 *1* のグラフは式 *2* のグラフを平行移動したものではないことに注意しなさい．定義域を考えるとわかると思います．実際に作図すると理解が深まると思います．

2.5.3　175(3)

与式の根号の中を $r(x),\ r(x) \geq 0$ とする．

$$\begin{aligned} r(x) &= -x^2 + x + 6 \\ &= -(x^2 - x - 6) \quad \text{因数分解と平方完成} \\ &= -(x-3)(x+2) \quad \text{定義域のために不等式を解く} \\ &= -(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 \quad \text{これは円ですね} \end{aligned}$$

$r(x) \geq 0$ **を解いて** $-2 \leq x \leq 3$

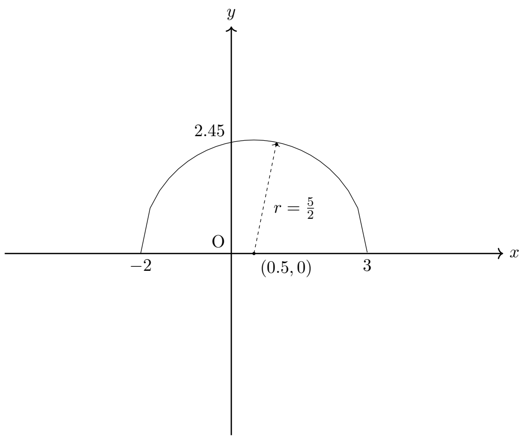

図 19: 175(3) のグラフ

定義域　$-2 \leq x \leq 3$
値域　$0 \leq y \leq \sqrt{6}$
グラフ　**図** *19*

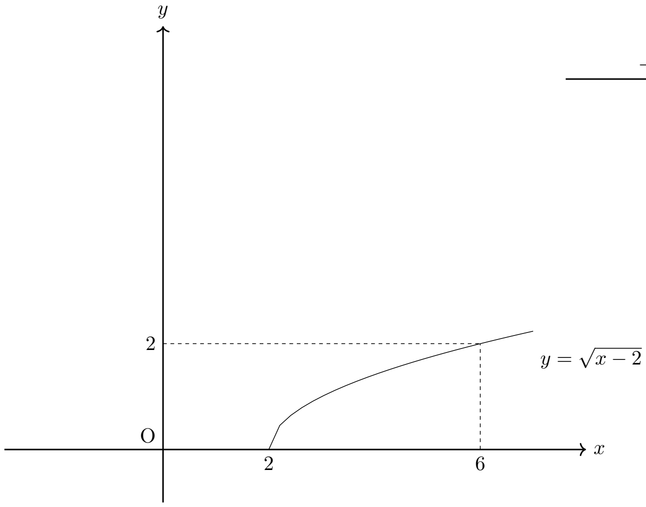

図 20: 175-(1) のグラフ

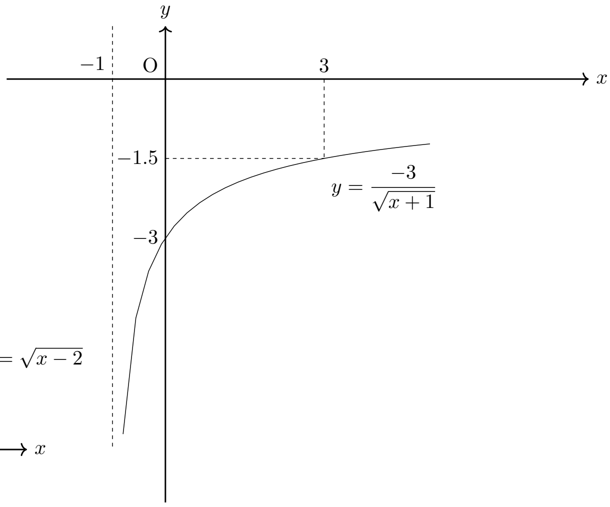

図 21: 175-(2) のグラフ

2.5.4 円の方程式

中心座標 (a, b) で半径 r とする円の方程式は $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ で表現される．中心を原点として半径が 1 の場合は $x^2 + y^2 = 1$ となる．

図 *22* は中心を原点とし半径 r の円を描いている．点 P の座標は三角関数を用いて書くと $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と表すことができる．$\triangle POQ$ に三平方の定理を適用すると

$$\begin{aligned}
\overline{PO}^2 &= \overline{PQ}^2 + \overline{QO}^2 \\
r^2 &= (r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 \\
r^2 &= y^2 + x^2 \\
x^2 + y^2 &= r^2
\end{aligned}$$

これが円を表す方程式である．

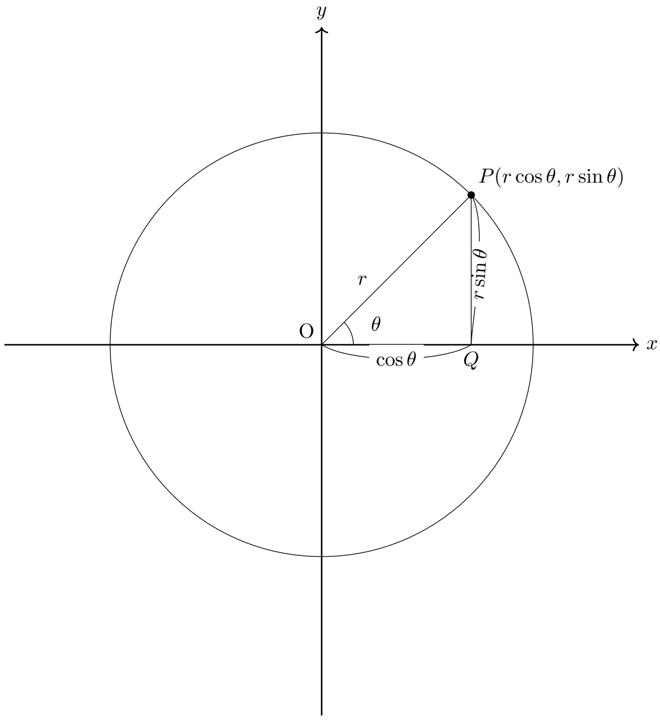

図 22: 円の方程式

2.6　問題 176

無理関数の平行移動の問題ですね．

2.6.1　(1)

$$y = \sqrt{x-2}$$

根号の中 $x-2 \geq 0$ より求める定義域は $x \geq 2$ である．次に値域は y が取る値の範囲であるから値域は $y \geq 0$ である．グラフは図 *20* に示している．

2.6.2　(2)

根号の中 ≥ 0 より定義域は $x \geq 0$，値域は $0 \leq y$ である．グラフは図 *25* に示している．

2.6.3　(3)

$y = \sqrt{x-2}$ を y 軸方向に -2 平行移動したものとなる．
定義域は $x \geq 2$ で値域は $y \geq -2$ である．

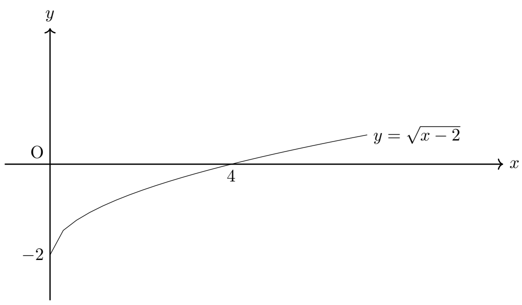

図 23: 176(2) のグラフ

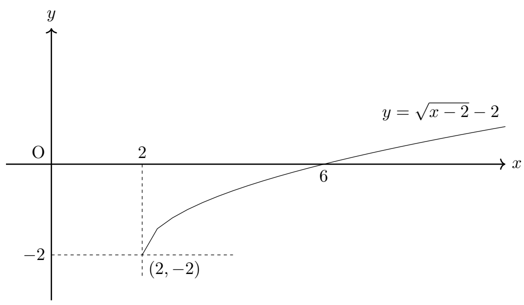

図 24: 176(3) のグラフ

2.6.4　(4)

$y = \sqrt{x+1}$ を y 軸方向に 2 平行移動したものとなる．

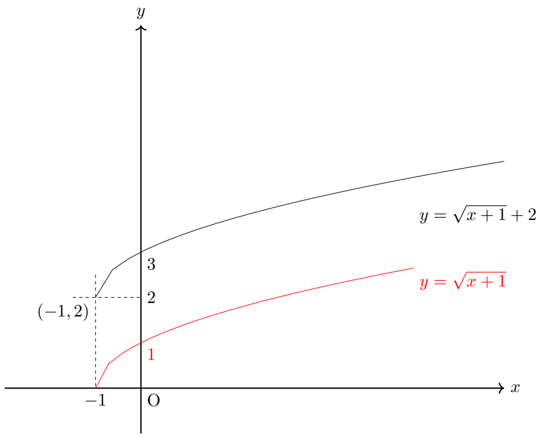

図 25: 176(4) のグラフ

2.7　問題 177

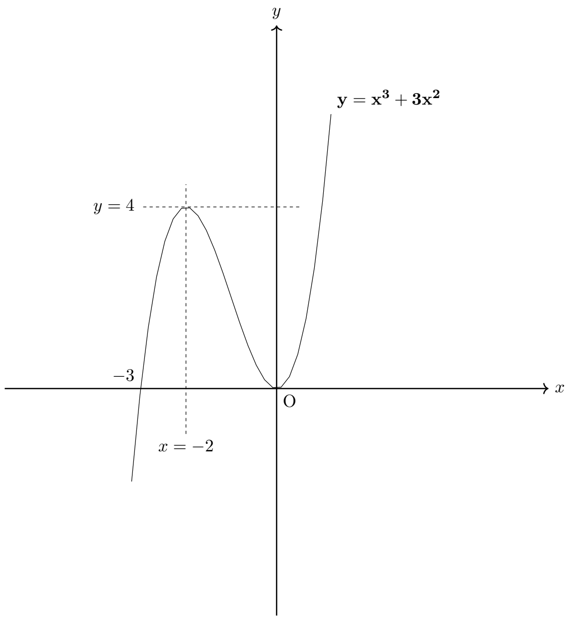

図 26: 177 の基本となるグラフ

2.7.1　x 軸対称

x **軸対称の関数は** $y = -f(x)$ **で求めることができるので，** $y = -(x^3 + 3x^2)$

2.7.2　y 軸対称

y **軸対称の関数は** $y = f(-x)$ **で求めることができるので，**

$$\begin{aligned} y &= (-x)^3 + 3(-x)^2 \\ &= -x^3 + 3x^2 \end{aligned}$$

2.7.3　原点対称

原点対称の関数は $y = -f(-x)$ **で求めることができるので，**

$$\begin{aligned} y &= -(-x)^3 + 3(-x)^2 \\ &= x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

2.8 問題 178

$y=\sqrt{x-1}+2$ のグラフ (図 *27*) をもとに，次の問に回答していくという問題．

2.8.1 178(1):$y=-\sqrt{x-1}-2$

$y=-\sqrt{x-1}-2$ のグラフは，$(a)y=f(x)=\sqrt{x-1}+2$ とすると $y=-f(x)$ が成立するので x 軸対称であることがわかる．$(b)y=-\sqrt{x-1}$ のグラフを書いて次に y 軸方向に -2 平行移動すると良い．結果を図 *28* の赤線で示している．

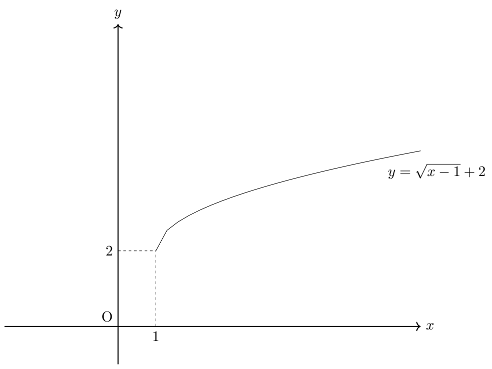

図 27: 178 の基本のグラフ

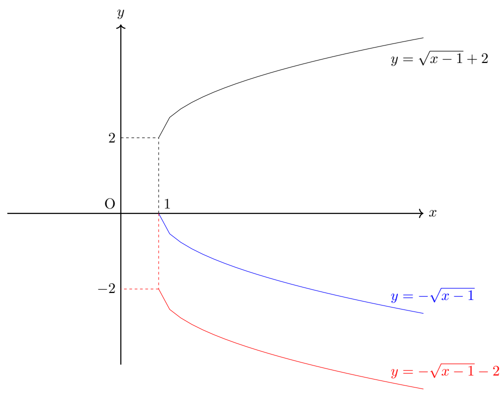

図 28: 178-(1) のグラフ

2.8.2 178(2)$y=\sqrt{-x-1}+2$

$f(x)=\sqrt{x-1}+2$ とすると，$y=\sqrt{-x-1}+2$ は $y=f(-x)$ である．よって求めるグラフは y 軸対称となる．

2.8.3 178(2)$y=-\sqrt{-x-1}-2$

$y=f(x)=\sqrt{x-1}+2$ とすると，$y=\sqrt{-x-1}+2$ は $y=-f(-x)$ である．よって求めるグラフは原点対称となる．

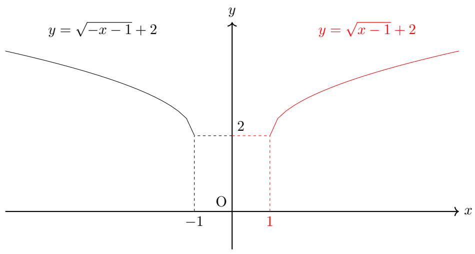

図 29: 178 の基本のグラフ

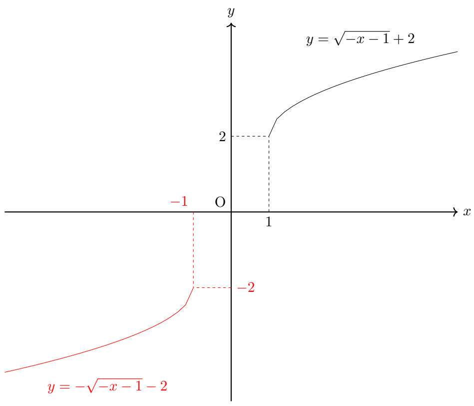

図 30: 178-(3) のグラフ

3　逆関数と求め方

3.1　逆関数とは

$y=f(x)$ が *1* 対 *1* の関数 ($x_1 \neq x_2$ に対して $f(x_1) \neq f(x_2)$) の時ある y に対して唯一つの x が定まる．つまり，$x=f^{-1}(y)$ と書き，f^{-1} を f の逆関数という．

$$\boxed{y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)}$$

3.2　逆関数の求め方

$\boxed{y=f(x)} \Rightarrow \boxed{x=g(y)} \Rightarrow \boxed{y=f^{-1}(x)}$

1. $y=f(x)$ を x について解く，つまり $x=g(y)$ を求める．
2. $x=g(y)$ の x と y を入れ替える
   $y=g(x)=f^{-1}(x)$ とする．これが求める逆関数となります．

3.3　定義域と値域

もとの関数		逆関数
定義域	$\Rightarrow$	値域
値域	$\Rightarrow$	定義域

3.4　逆関数のグラフ

逆関数のグラフ，$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称となる．

例題 *1* $y=\sqrt{x}$ の逆関数を求める．

1. x について解くと $x=y^2$ である．
2. x と y を入れ替えて $y=x^2$

もとの関数 ($y=\sqrt{x}$)		逆関数 ($y=x^2$)
定義域 ($x \geq 0$)	$\Rightarrow$	値域 ($y \geq 0$)
値域 ($y \geq 0$)	$\Rightarrow$	定義域 ($x \geq 0$)

そのグラフを以下に掲載します．

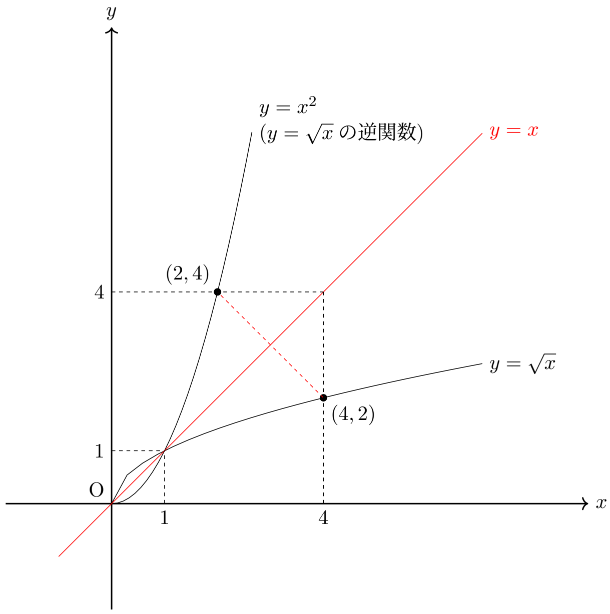

図 31: 例題のグラフ

3.5　問題 179 の解説

3.5.1　179(1)

与式を $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ **とする．**

1. x **について解く**

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x-2} \\
(x-2)y &= 1 \\
x - 2 &= \frac{1}{y} \\
x &= \frac{1}{y} + 2
\end{aligned}
$$

2. x **と** y **を入れ替える**

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

3. **定義域と値域**

- **もとの関数** ($y = \sqrt{x}$)　　**逆関数** ($y = x^2$)
  定義域 ($x \geq 0$)　$\Rightarrow$　**値域** ($y \geq 0$)
  値域 ($y \geq 0$)　$\Rightarrow$　**定義域** ($x \geq 0$)

4. グラフを図??に示しています．

3.5.2　179(2)

与式を $y = f(x) = x^2 - 3$ とする．

1. x について解く

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 3 \\
-x^2 &= -y - 3 \\
x^2 &= y + 3 \\
x &= \pm\sqrt{y+3}
\end{aligned}
$$

与えられた条件 $x \geq 0$ より $x = \sqrt{y+3}$

2. x と y を入れ替える

$$
y = \sqrt{x+3}
$$

3. 定義域と値域

- もとの関数 $(y = x^2 - 3)$　　逆関数 $(y = \sqrt{x+3})$
  定義域 $(x \geq 0)$　$\Rightarrow$　値域 $(y \geq 0)$
  値域 $(y \geq -3)$　$\Rightarrow$　定義域 $(x \geq -3)$

4. グラフを図 33 に示しています．

3.5.3　179(3)

与式を $y = f(x) = -\sqrt{x}$ とする．

1. x について解く

$$
\begin{aligned}
y &= -\sqrt{x} \\
y^2 &= x \\
x &= y^2
\end{aligned}
$$

与えられた条件 $x \geq 0$ より $x = \sqrt{y+3}$

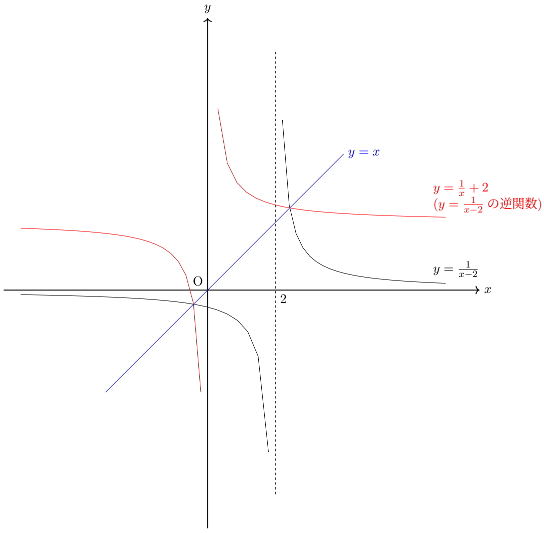

図 32: 179(1) のグラフ

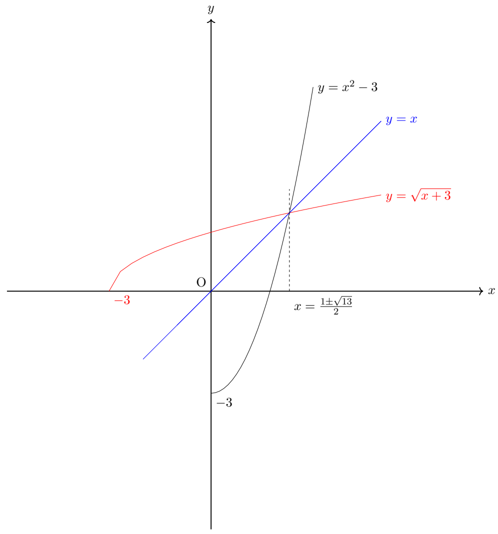

図 33: 175-(2) のグラフ

2. x **と** y **を入れ替える**

$$y = x^2$$

3. **定義域と値域**

- **もとの関数** $(y = -\sqrt{x})$ 　　**逆関数** $(y = x^2)$
  定義域 $(x \geq 0)$ $\Rightarrow$ **値域** $(y \geq 0)$
  値域 $(y \leq 0)$ $\Rightarrow$ **定義域** $(x \leq 0)$

4. **グラフを図** *34* **に示しています．**

3.5.4 179(4)

与式を $y = f(x) = \sqrt{2-x} - 1$ **とする．**

1. x **について解く**

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{2-x} - 1 \\
y + 1 &= \sqrt{2-x} \\
(y+1)^2 &= (\sqrt{2-x})^2 \\
(y+1)^2 &= 2 - x \\
x &= -(y+1)^2 + 2 \\
(x &= -y^2 - 2y + 1)
\end{aligned}$$

2. x **と** y **を入れ替える**

$$y = -(x+1)^2 + 2$$

3. **定義域と値域**

- **もとの関数** $(y = \sqrt{2-x} - 1)$ 　　 **逆関数** $(y = -(x+1)^2 + 2)$
  定義域 $(x \leq 2)$ 　　 $\Rightarrow$ 　　 **値域** $(y \leq 2)$
  値域 $(y \geq -1)$ 　　 $\Rightarrow$ 　　 **定義域** $(x \geq -1)$

4. **グラフを図** 35 **に示しています．**

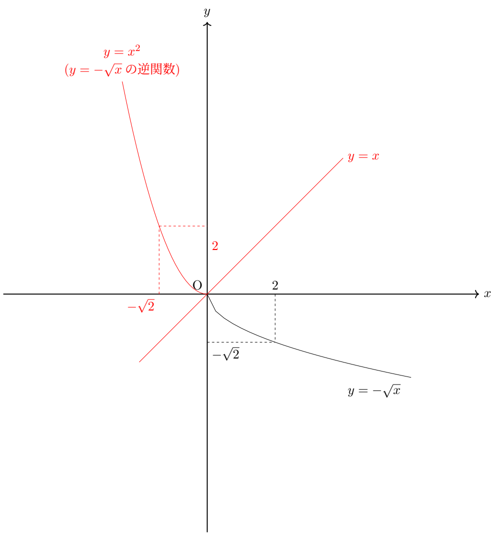

図 34: 179(3) のグラフ

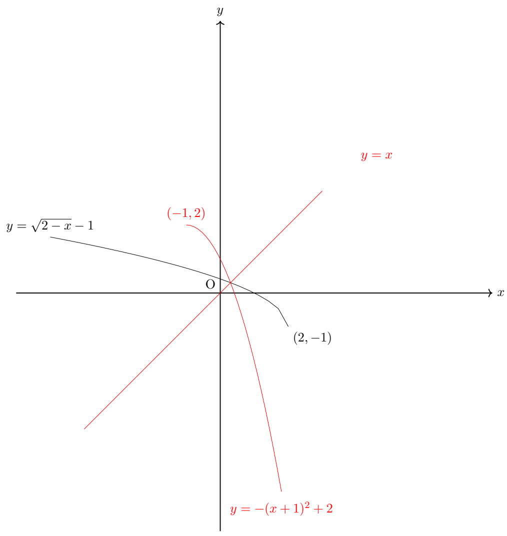

図 35: 179-(4) のグラフ