3 章関数とグラフ
第 2 節　いろいろな関数
Check の問題の解説 (180,181,182,183,185,186,187,188)　 pp.38
2021 年 10 月 18 日

1　問題 180 の解説

偶関数か奇関数かを調べる問題.

偶関数と奇関数の調べ方

$f(-x) = f(x)$ が成立すると偶関数，y 軸対称
$f(-x) = -f(x)$ が成立すると奇関数，x 軸対称

1.1　180(1):$f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ f(-x) &= 2(-x) \\ &= -2x \\ \therefore f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

奇関数である.

1.2　180(2)：$f(x) = 3x^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 1 \\ f(-x) &= 3(-x)^2 - 1 \\ &= 3x^2 - 1 \\ \therefore f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

偶関数である.

1.2.1 180(3)：$f(x) = x(x^2 - 1)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(x^2 - 1) \\
f(-x) &= (-x)\{(-x)^2 - 1\} \\
&= 2x \\
\therefore f(-x) = -f(x)
\end{aligned}
$$

よって奇関数である．

1.3 180(4)：$f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^4 - 1}{x^2} \\
f(-x) &= \frac{(-x)^4 - 1}{(-x)^2} \\
&= \frac{x^4 - 1}{x^2} \\
\therefore f(-x) = f(x)
\end{aligned}
$$

よって，偶関数である．

1.4 180(5)：$f(x) = 3$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3 \\
f(-x) &= 3 \\
\therefore f(-x) = f(x)
\end{aligned}
$$

よって，偶関数である．

このような y の値が x の値によらず一定のものを**定数関数**と呼びます．y 軸について対称となっているので偶関数である．

1.5 180(6)：$f(x) = 3 + x^3$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3 + x^3 \\
f(-x) &= 3 + (-x)^3 \\
&= 3 - x^3 \\
\{f(-x) \neq f(x)\} \wedge \{f(-x) \neq -f(x)\}
\end{aligned}
$$

よって，偶関数，奇関数のいずれでもない．

2　問題181

分母$\neq 0$，平方根の中は≥ 0などを考慮する．

2.1　181-(1):$y = \dfrac{3x-5}{x-2}$

分母と分子，ともに一次関数なので$y = \dfrac{a}{x-p} + q$の形に式変形を行います．

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-5}{x-2} \\ &= \frac{3(x-2)+1}{x-2} \\ &= 3 + \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{1}{x-2} + 3 \end{aligned}$$

- 分母$\neq 0$

  よって定義域は$x \neq 2$ ($x = 2$を含まない，実数xの全範囲)

- y軸の漸近線が$y = 3$なので

  値域は$y \neq 3$($y = 3$を含まない，実数yの全範囲)

2.2　180(2)：$y = -\sqrt{x+3} + 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 1 \\ f(-x) &= 3(-x)^2 - 1 \\ &= 3x^2 - 1 \\ \therefore f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

偶関数である．

3　問題 182 の解説

与式は $y = \dfrac{2}{x}$

1. x 軸方向に 1 移動

$$y = \frac{2}{x-1}$$

2. これをさらに，y 軸方向に -3 移動

$$y = \frac{2}{x-1}$$

3. グラフ

図 1 に示しています．黒線は $y = \dfrac{2}{x}$ のグラフで　赤色と青色がそれぞれ $y = \dfrac{2}{x-1}$ と $y = \dfrac{2}{x-1}$　を表しています．

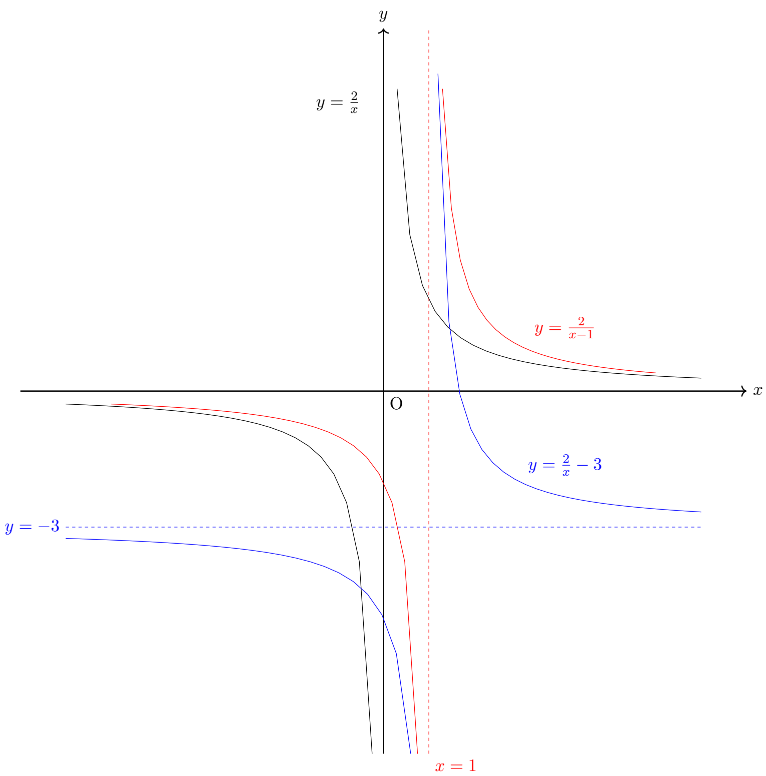

図 1: 問題 182 の解答

4　問題 183 の解説

与式は $y = \sqrt{-x}$，付随する条件は $x \leq 0$ である．

1. x 軸方向に -3 移動
$$y = \sqrt{-(x+3)}$$
2. これをさらに，y 軸方向に 2 移動
$$y = \sqrt{-(x+3)} + 2$$
3. グラフ

　図 2 に示しています．黒線は $y = \sqrt{-x}$ のグラフで　赤色と青色がそれぞれ $y = \sqrt{-(x+3)}$ と $y = \sqrt{-(x+3)} + 2$　を表しています．

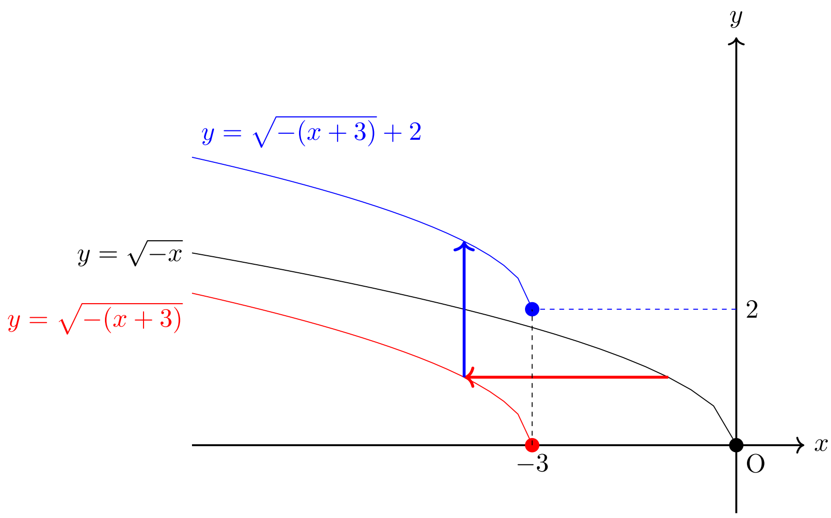

図 2: 問題 183 の解答

4.1 問題 184

作図する問題ですね.

4.1.1 184(1)

$y = (x-1)^3 - 2$ は $y = x^3$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである. 結果を図 3 に示しています.

4.1.2 184(2)

が $y = -(x+1)^4 + 1$ は $y = -x^4$ のグラフを x 軸方向に -1, y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである. 結果を図 4 に示しています.

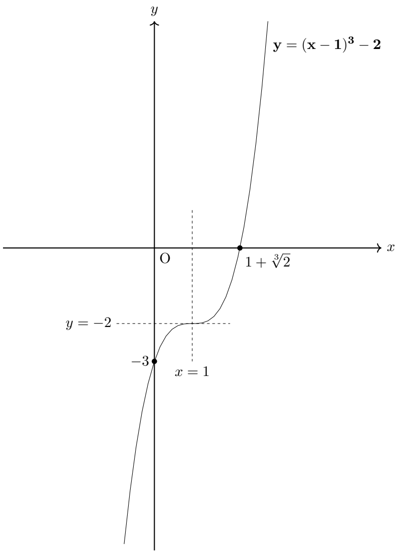

図 3: 184(1) のグラフ

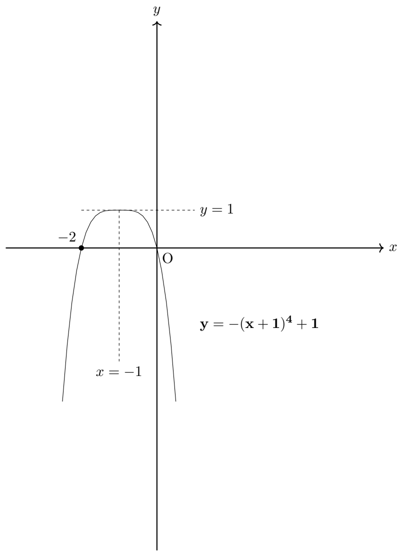

図 4: 184(2) のグラフ

4.1.3 184(3)

$y = (x+1)^4 - 2$ は $y = x^4$ のグラフを x 軸方向に -1, y 軸方向に -2 平行移動したものである. 結果を図 5 に示しています.

4.1.4 172(4)

$y = -(x-2)^4 + 1$ は $y = x^4$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 平行移動したものである. 結果を図 6 に示しています.

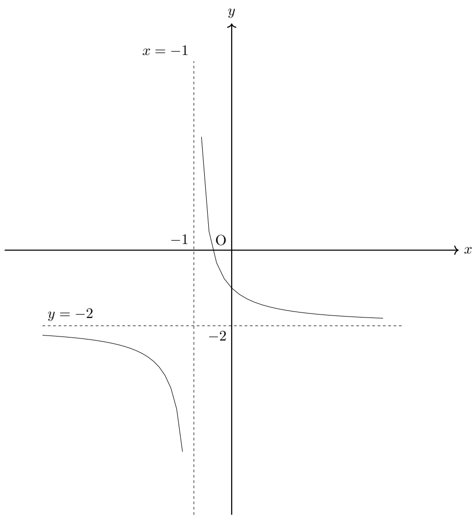

図 5: 184(3) のグラフ

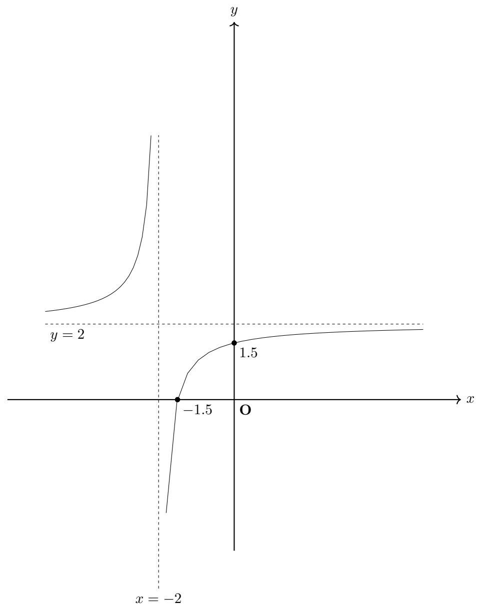

図 6: 184(4) のグラフ

4.1.5　184(5)

$y=\sqrt{x+1}-2$ は $y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したものである．結果を図 7 に示しています．

4.1.6　184(6)

$y=\sqrt{-x+1}+1$ は $y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 平行移動したものである．結果を図 8 に示しています．

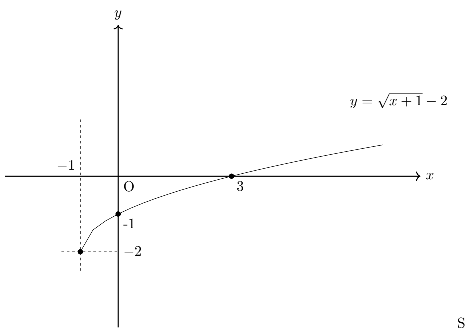

図 7: 184(5) のグラフ

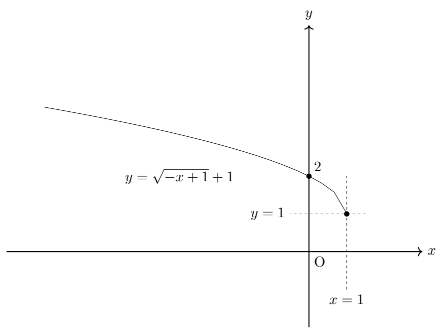

図 8: 184(6) のグラフ

4.2 問題 185

y 軸対称と偶関数

関数 $y = f(x)$ が $f(-x) = f(x)$ を満たすとき、関数 $y = f(x)$ を偶関数という．また，偶関数は、そのグラフが y 軸に関して対称なグラフをもつ関数である．点 (x, y) を y 軸に関して対称移動させると点 $(-x, y)$ になります．ですから y 軸に対称な関数を求めるには与式の x を $-x$ とするとよい．

$y = 3x^4 - 2x$ の y 軸対称な関数は $y = 3(-x)^4 - 2(-x) = 3x^4 + 2x$ である．グラフを図 9 に示しています．$y = -(x+1)^4 + 1$ は $y = -x^4$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．結果を図 9 に示しています．

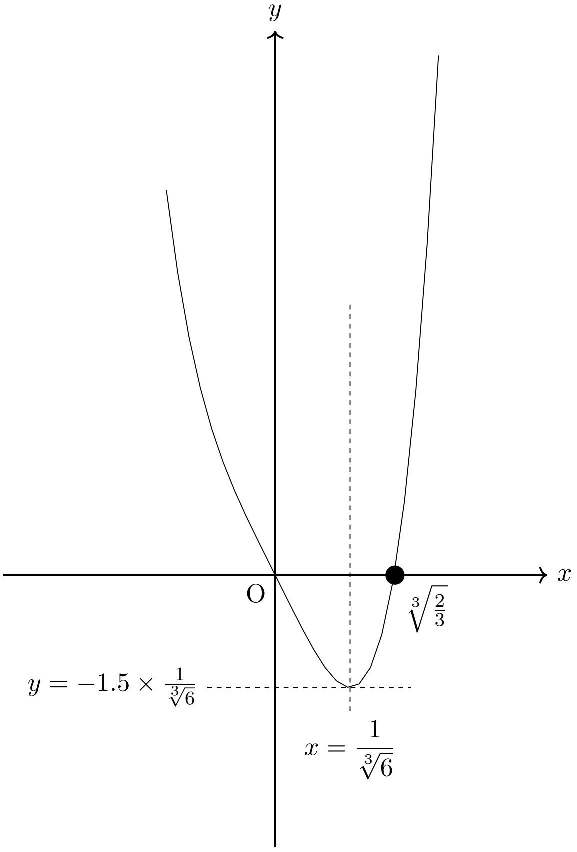

図 9: 185 のグラフ

4.3　問題 186

原点対称

原点対象は関数　$\mathrm{y} = f(x)$　を　x 軸対象に移動したあと y 軸対象に移動したものと考えることもできる．したがって求める関数は $y = -f(-x)$ となります．

与式 $y = \sqrt{x+1} - 1$ の原点対象対称な関数は $y = -\{\sqrt{(-x)+1}\}$ となります．図 10 に示しています．黒線と赤線，それぞれとなります．

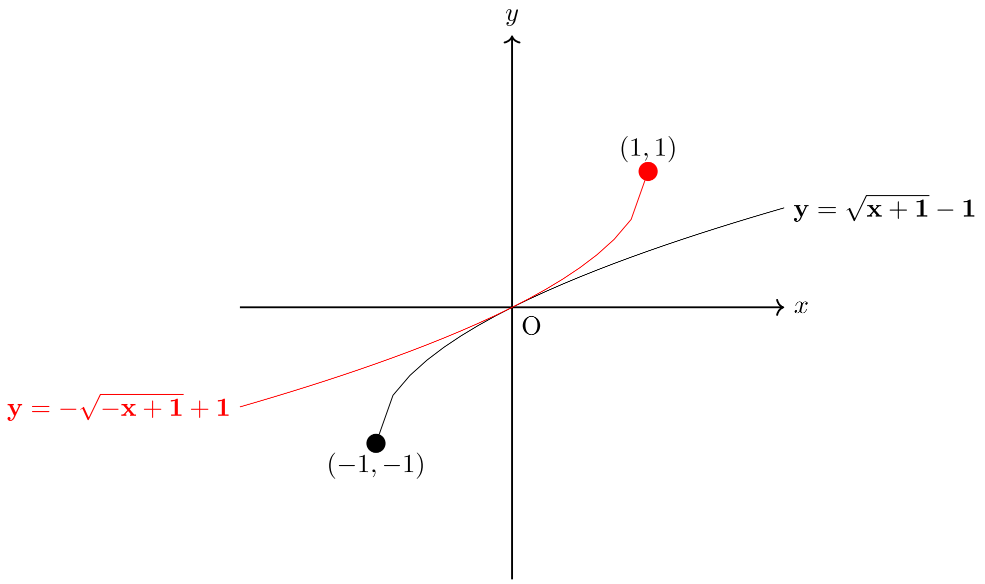

図 10: 186 のグラフ

逆関数，定義域と値域

$y = f(x)$ の逆関数の求め方，$f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と書くことにします．

- 逆関数の存在を確認 (存在する場合，存在しない場合)
- $y = f(x)$ を $x = f(y)$ の形にする．(x について解く)
- 定義域と値域を明らかにする．ここでは x の範囲，y の範囲となります．
- $x = f(y)$ の x と y を入れ代える．(変数に x を用いる習慣)
- 求めた逆関数の定義域と値域を調べる．
  もとの関数の定義域 (の値域) が逆関数の値域 (定義域) に，それぞれなる．
- 関数のグラフと逆関数のグラフは $y = x$ に関して対称となっている．

5 問題 187

与式 $y = \dfrac{3}{x+2}, \quad x \neq -2$ を x について解きます．

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{x+2} \\ y(x+2) &= 3 \\ x+2 &= \frac{3}{y} \\ x &= \frac{3}{y} - 2 \\ \text{x と y を入れ換えて} & \\ \text{求める逆関数は } f^{-1}(x) &= \frac{3}{x} - 2 \end{aligned}$$

与式		逆関数	
定義域	$x \neq -2$	値域	$y \neq -2$
値域	$y \neq 0$	定義域	$x \neq 0$

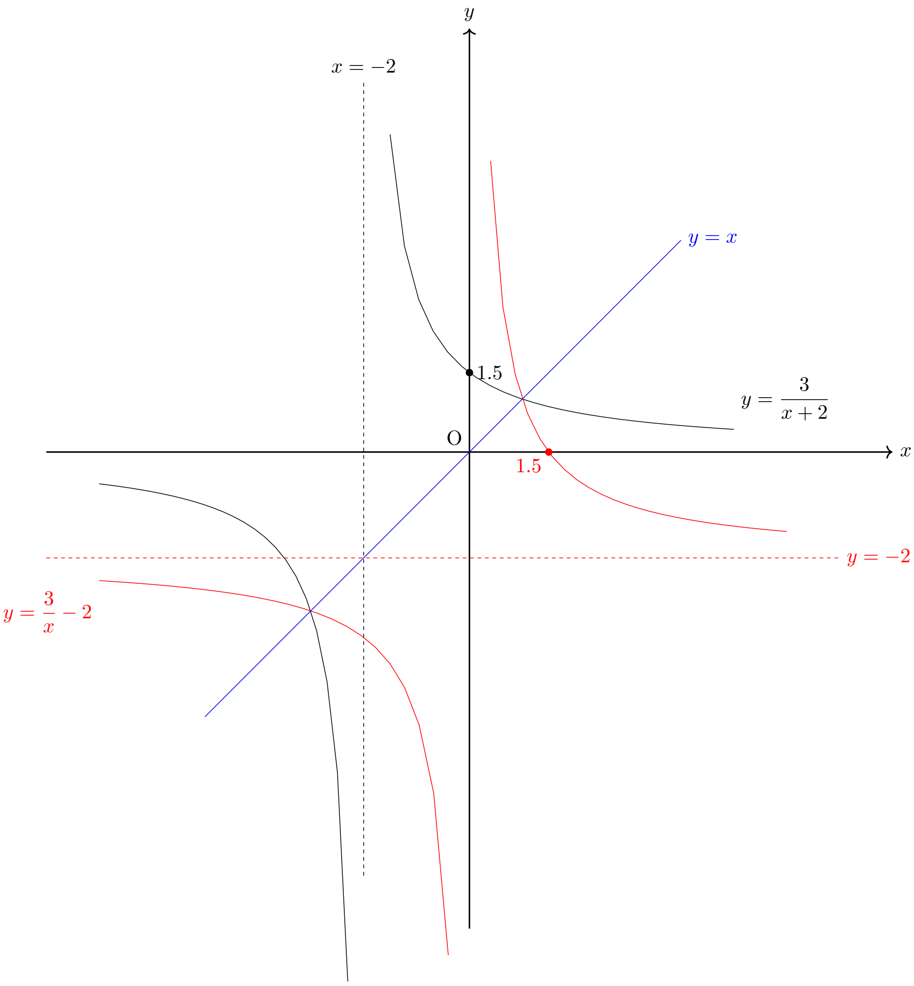

図 11: 187 のグラフ

6　問題 188

与式 $f(x) = (x-2)^2, \quad x \leq 2$ を x について解きます．

$$
\begin{aligned}
y &= (x-2)^2 \text{とおきます．} \\
\pm\sqrt{y} &= (x-2) \\
x \leq 2 \text{ より} \quad -\sqrt{y} &= x-2 \\
x &= -\sqrt{y}+2 \\
x \text{ と } y \text{ を入れ換えて } y &= -\sqrt{x}+2 \\
\text{求める逆関数は } f^{-1}(x) &= -\sqrt{x}+2
\end{aligned}
$$

与式のグラフは図 12 の黒線で逆関数のグラフは図 12 の赤線でそれぞれ示しています．

与式		逆関数	
定義域	$x \leq 2$	値域	$y \leq 2$
値域	$y \geq 0$	定義域	$x \geq 0$

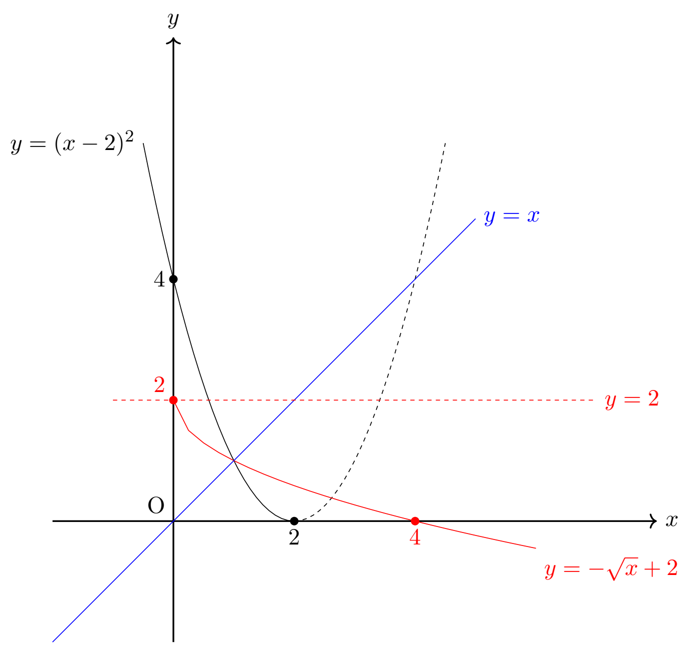

図 12: 188 のグラフ