3 章関数とグラフ
第 1 節　2 次関数
Basic と Check 問題 150,151 と 161 の解説　pp.31-33

1　2 次関数の最大値・最小値問題

2 次関数の最大値・最小値問題はいくつかのパターンに分類され，基本をしっかり抑えれば大丈夫です．

1.1　定義域無し-全ての実数 x-

定義域の指定がない場合，平方完成してグラフを書きます．頂点の座標が最大値もしくは最小値になります．

アプローチ

- 平方完成してグラフの概形を描く
  $y = ax^2 + bx + c \Longrightarrow y = a(x-p)^2 + q$
  繰り返して掲載しますが，2 次函数のグラフです．

  1. $a > 0$ のとき (図 1)　$x = p$ のとき最小値 $y = q$
  2. $a < 0$ のとき (図 2)　$x = p$ のとき最大値 $y = q$

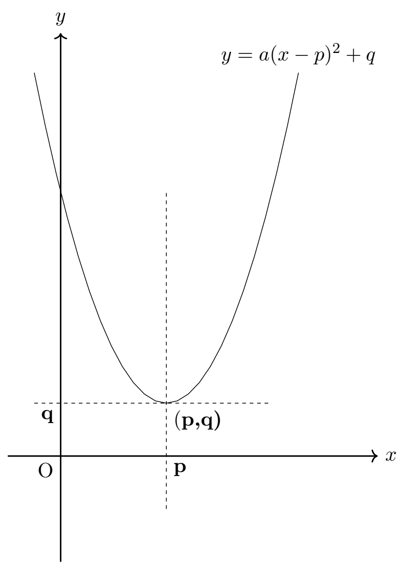

図 1: $a > 0$ のとき

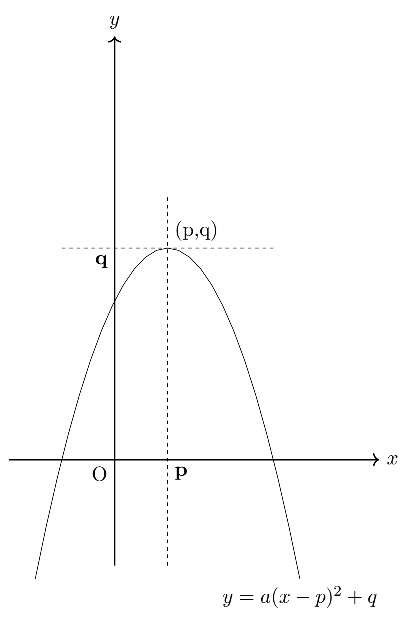

図 2: $a < 0$ の参照とき

1.2　定義域がある場合

変数 x の範囲が指定されている場合は対称軸と頂点の関係で３つのパターンです．

３つのパターン

・ここでは，下に凸のグラフで定義域を $a \leq x \leq b$ とします．

1. 定義域が対称軸の左側

   図 3 に示しているように最大値は $y=f(a)$ で最小値は $y=f(b)$ となります．

2. 定義域が対称軸の右側

   図 4 に示しているように最大値は $y=f(b)$ で最小値は $y=f(b)$ となります．

3. 対称軸が定義域内の場合

   図 5 と 6 に示しているように，頂点が最小値を $y=f(p)$ 取る．最大値は $f(a)$ と $f(b)$ を比較して決定することになる．

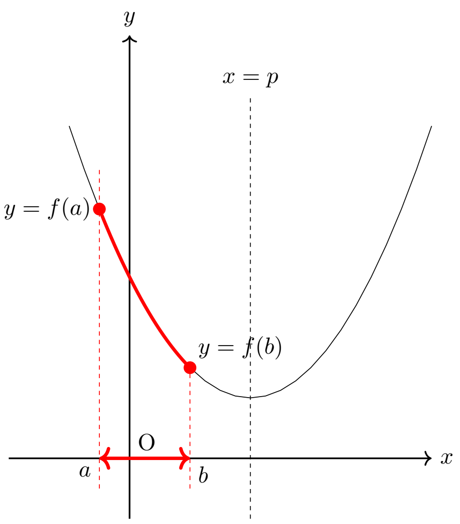

図 3: 定義域が軸の左側

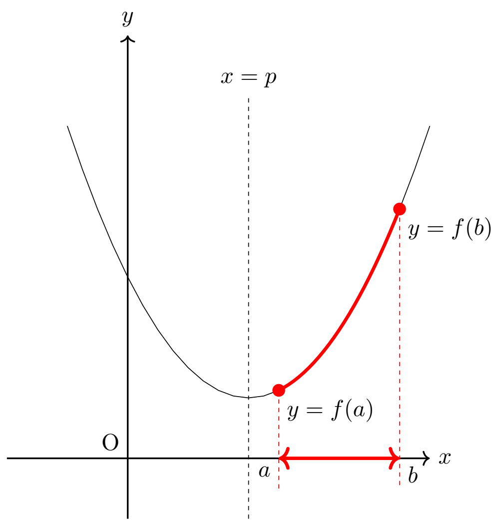

図 4: 定義域が軸の右側

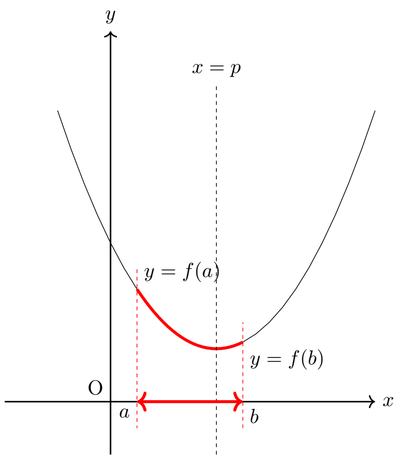

図 5: 定義域の中に対称軸を含む その 1

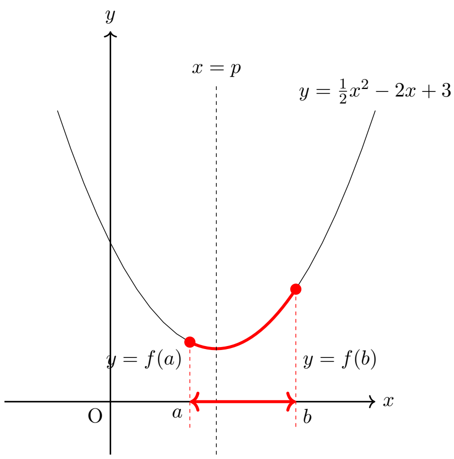

図 6: 定義域の中に対称軸を含む その 2

2　問題 150:定義域の指定なし

1. $y = x^2 - 4x + 8$

   平方完成すると $y = (x-2)^2 + 4$ を得ます．よって，最小値は $x = 2$ の時に $y = 4$ となります．頂点の座標が $(2,4)$ で下に凸のグラフとなります．グラフは図 7 です．

2. $y = -x^2 + 6x - 1$

   平方完成すると $y = -(x-3)^2 + 8$ を得ます．よって，最大値は $x = 3$ の時に $y = 8$ となります．頂点の座標が $(3,8)$ で上に凸のグラフとなります．グラフは図 8 です．

3. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

   平方完成して $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$ となります．よって，最小値は $x = 2$ の時に $y = -2$ となります．頂点の座標が $(2,-2)$ で下に凸のグラフとなります．グラフは図 9 です．

4. $y = -3x^2 + 6x + 2$

   平方完成して $y = -3(x-1)^2 + 52$ となります．よって，最大値は $x = 1$ の時に $y = 5$ となります．頂点の座標が $(1,5)$ で上に凸のグラフとなります．グラフは図 10 です．

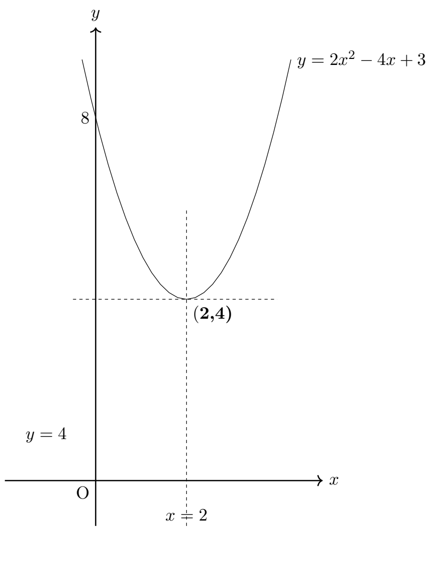

図 7: 問題 150(1)

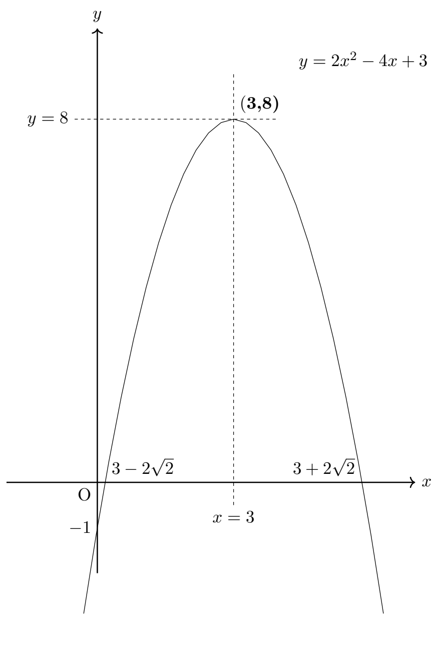

図 8: 問題 150(2)

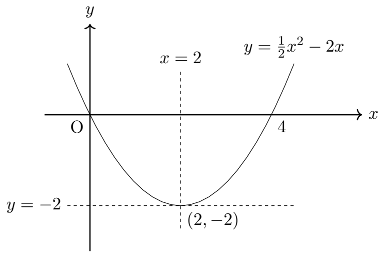

図 9: 問題 150(3)

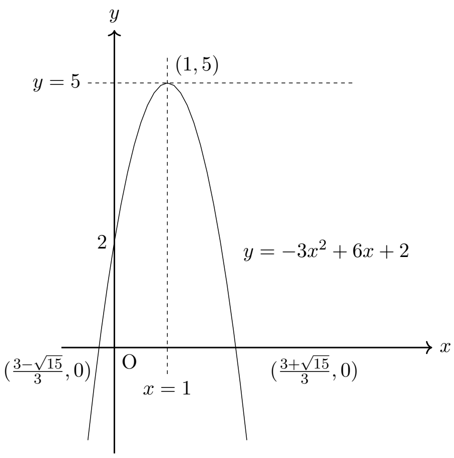

図 10: 問題 150(4)

3　問題 151 の解説

3.1　151(1)

与式 $y = x^2 - 4x, (0 \leq x \leq 3)$ を平方完成します.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 \\ &= (x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (2, -4)$
対称軸	$x = 2$
x 軸との交点	$x = 0, x = 4$ で交わる
y 軸との交点	$y = 0$
原点を通る	
最大値	$x = 0$ のとき $y = 0$
最小値	$x = 2$ のとき $y = -4$
グラフ	図 11

3.2　151(2)

与式 $y = x^2 - 6x + 7, (0 \leq x \leq 2)$ を平方完成します.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 7 \\ &= x^2 - 2(3)x + (3)^2 - 9 + 7 \\ &= (x-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

頂点の座標	$(p, q) = (3, -2)$
対称軸	$x = 3$
x 軸との交点	$x = 3 - \sqrt{2}, x = 3 + \sqrt{2}$ で交わる
y 軸との交点	$y = 7$
最大値	$x = 0$ のとき $y = 7$
最小値	$x = 2$ のとき $y = -1$
グラフ	図 12

3.3　151(3)

与式 $y = -x^2 + 2x + 2$ を平方完成します.

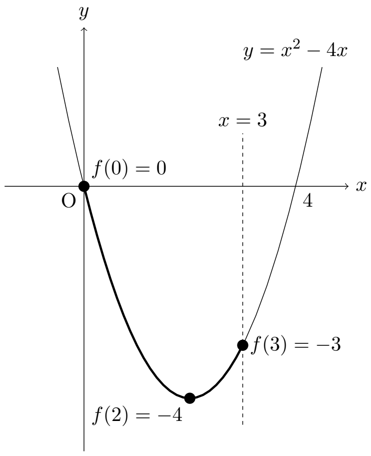

図 11: 問題 151(1) のグラフ

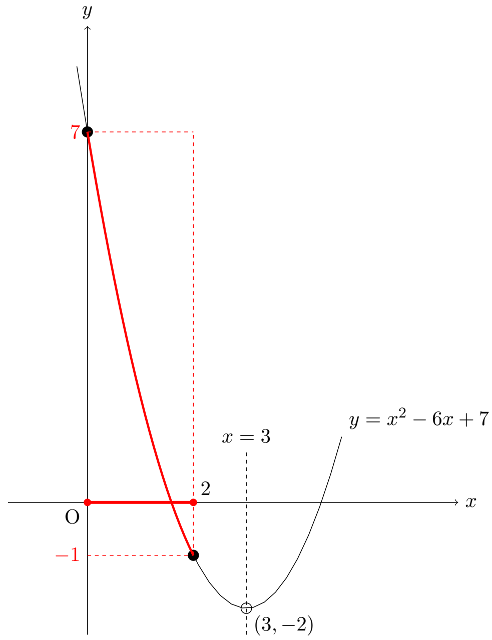

図 12: 問題 151(2) のグラフ

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2+2x+2 \\
&= -(x^2-2x+1-1)+2 \\
&= -\{(x-1)^2-1\}+2 \\
&= -(x-1)^2+1+2 \\
&= -(x-1)^2+3
\end{aligned}
$$

頂点の座標	$(p,q)=(1,3)$
対称軸	$x=1$
x 軸との交点	$x=3-\sqrt{2}, x=3+\sqrt{2}$ で交わる
y 軸との交点	$y=2$
最大値	$x=1$ のとき $y=3$
最小値	$x=-1$ のとき $y=-1$
グラフ	図 13

3.4　151(4)

与式 $y=2x^2-8x+5$ を平方完成します．

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 8x + 5 \\
&= 2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) \\
&= 2\left\{(x-2)^2 + \frac{-8+5}{2}\right\} \\
&= 2(x-2)^2 - 3
\end{aligned}
$$

頂点の座標	$(p, q) = (2, -3)$
対称軸	$x = 2$
x 軸との交点	$x = 3 - \sqrt{2}, x = 3 + \sqrt{2}$ で交わる
y 軸との交点	$y = 5$
最大値	$x = 0, 4$ のとき $y = 5$
最小値	$x = 2$ のとき $y = -3$
グラフ	図 14

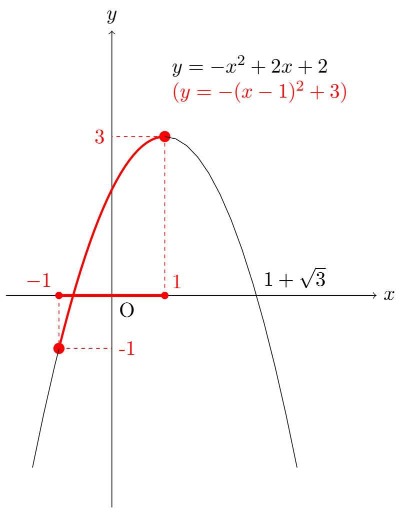

図 13: 問題 151(3) のグラフ

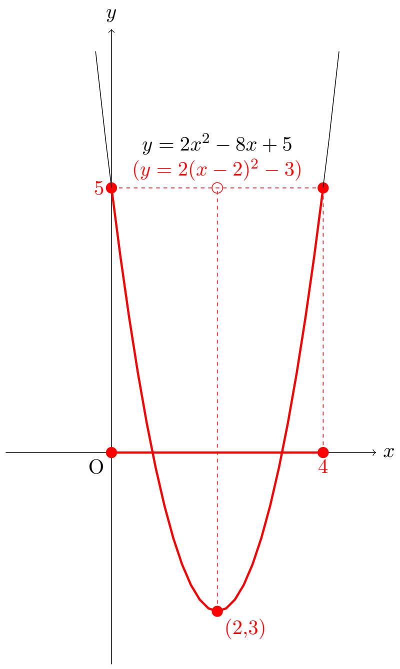

図 14: 問題 151(4) のグラフ

3.5　151(5)

与式 $y = -\frac{x^2}{2} - x + 3$ を平方完成します.

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{x^2}{2} - x + 3 \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 6) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1 - 1 - 6) \\
&= -\frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 - 7\right\} \\
&= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

頂点の座標	$(p,q) = (-1, \frac{7}{2})$
対称軸	$x = -1$
x 軸との交点	$x = -3, x = 2$ で交わる
y 軸との交点	$y = 5$
最大値	$x = -1$ のとき $y = \frac{7}{2}$
最小値	$x = 2$ のとき $y = -1$
グラフ	図 14

3.6　151(6)

与式 $y = 2x^2 - 8x + 5$ を平方完成します.

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 8x + 5 \\
&= 2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) \\
&= 2\left\{(x-2)^2 + \frac{-8+5}{2}\right\} \\
&= 2(x-2)^2 - 3
\end{aligned}
$$

頂点の座標	$(p,q) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$
対称軸	$x = -\frac{1}{2}$
x 軸との交点	$x = 1, x = 2$ で交わる
y 軸との交点	$y = 4$
最大値	$x = 0$ のとき $y = 4$
最小値	$x = \frac{3}{2}$ のとき $y = -\frac{1}{2}$
グラフ	図 16

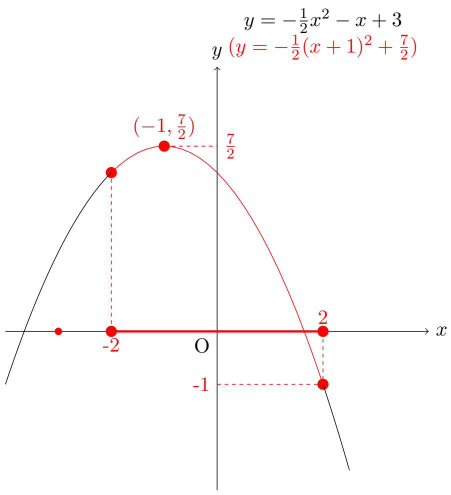

図 15: 問題 151(5) のグラフ

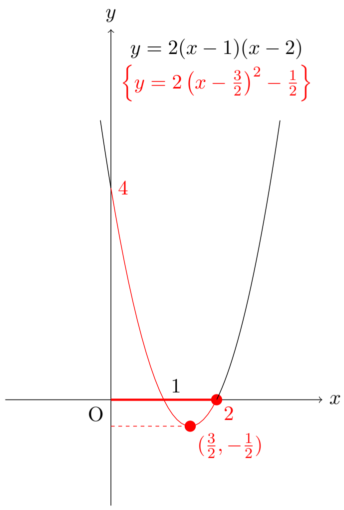

図 16: 問題 151(6) のグラフ

4　問題 161 の解説

与式 $y = -x^2 + 4x + 1$ を平方完成します.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + 1 \\ &= -(x^2 - 4x - 1) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4 - 1) \\ &= -\left\{(x-2)^2 - 5\right\} \\ &= -(x-2)^2 + 5 \end{aligned}$$

(1) と (2) ともに頂点の座標と対称軸は同一である.

頂点の座標	$(p, q) = (2, 5)$
対称軸	$x = 2$
x 軸との交点	$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{5}}{2}$ で交わる
y 軸との交点	$y = 1$

4.1　161(1)

グラフ図 17 より

最大値　$x = 1$ のとき $y = 4$

最小値　$x = -1$ のとき $y = -4$

4.2　161(2)

グラフ図 17 より

最大値　$x = 2$ のとき $y = 5$

最小値　$x = 1, 3$ のとき $y = 4$

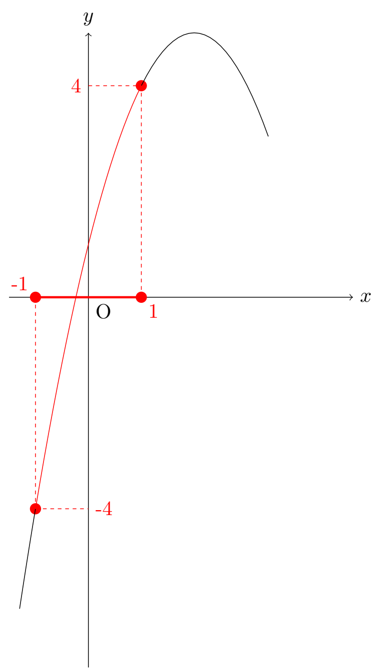

図 17: 問題 161(1) のグラフ

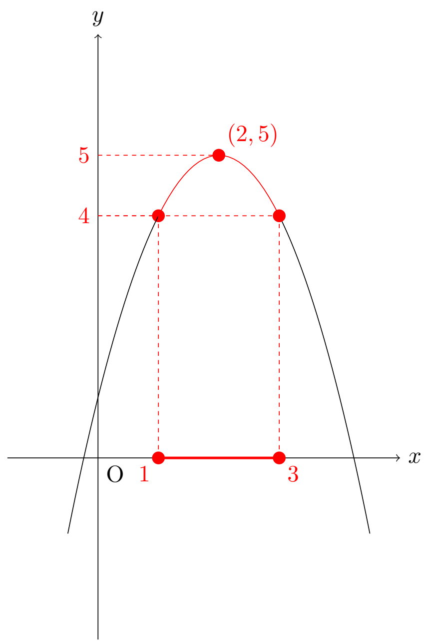

図 18: 問題 161(2) のグラフ